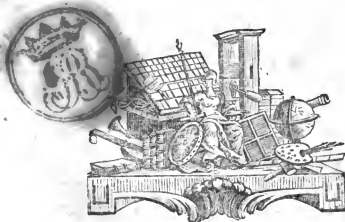
TRATTATO ELEMENTARE
D' IDRODINAMICA
DEL SIG. ABATE BOSSUT

TRADOTTO DAL FRANCESE:

AGGIUNTEVI

LE LEZIONI D' IDRODINAMICA
DEL P. GREGORIO FONTANA

D. S. P.

Pubblico Professore di Matematica Sublime nella Regia Università di Pavia.

IN PAVIA. MDCCLXXXV.

Nella Stamperia del R. I. Moniſtero di S. Salvatore
Con permiſſione.

GIOVANNI GRATOGNINI

a chi legge

Se vuole riguardarsi l' Idrodinamica come una parte puramente di Fisica, e trattarsi in maniera, che sciolta dalle angustie del più stretto rigore matematico si appaghi di una certa probabilità più o meno grande secondo le circostanze, egli è certo, che di questa Scienza in tal modo trattata e diretta principalmente alla pratica de' Periti ed Ingegneri sono ormai innumerabili le Opere, le quali da un secolo in qua nella sola nostra Italia sono venute alla luce prima ancora delle amplissime Raccolte di Parma e Firenze, dove con uno scarso corredo della Geometria più elementare può chicchessia mettersi al possesso di tutte le cognizioni relative alla

Scienza fisica delle acque. Ma se all' opposto vuolsi assegnare alla Dottrina de' Fluidi il posto, che le compete fra le Scienze rigorose ed esatte, considerandola come una parte essenziale delle Matematiche miste, ella diviene allora la Scienza più sublime e difficile, e nel tempo stesso la più bella e interessante, che vantar possano le Matematiche: e la più alta Geometria e l' Analisi più profonda bastano appena per internarsi ne' suoi deliziosissimi recessi, e per risolvere i Problemi affatto singolari e ammirabili, che ella offre a dovizia ai Geometri. E' però così scarso il numero delle Opere, nelle quali sia trattata questa Scienza sotto un tal punto di vista, e colla profondità conveniente al soggetto, che quattro sole in tutta l' Europa si contano le Opere classiche di questo genere, cioè l' Idraulica *di Gio-*

vanni

vanni Bernoulli, *l'* Idrodinamica *di suo Figlio Daniele*, *il* Trattato dell' Equilibrio e del Moto de' Fluidi *di D' Alembert*, *e il* Trattato d' Idrodinamica *del Sig. Ab. Bossut*.

Ho creduto pertanto non inutile di render comune all' Italia colla traduzione da me fatta l' elegante Compendio pubblicato due anni fa dal Sig. Bossut del suo Trattato ora accennato, aggiungendovi le Lezioni *d' Idrodinamica del mio rispettabile Maestro il P. D. Gregorio Fontana Pubblico Professore di Matematica Sublime in questa Regia Università di Pavia. La lettura dell' Opera farà conoscere, che dove il celebre Geometra Francese si restringe secondo lo scopo prefissosi a dimostrare le cose più essenziali, il Professore Italiano s' immerge nelle più ardue ed arcane ricerche, ed affronta i più elevati Problemi*

di questa Facoltà, sempre con quella finezza e perspicacità, che non mai gli viene meno; e quindi non sarà meraviglia, che le sue Lezioni *sieno riuscite per ben tre volte più estese di quel Compendio.*

Che se egli ha pure tutti i diritti alla comune riconoscenza per le tante cose belle e profonde, di cui ha saputo arricchire le sue Lezioni, vuole però nel tempo stesso, che sia noto al Pubblico, che in alcune di queste egli si è esattamente attenuto ai passi dell' illustre Geometra Tedesco Sig. Käsrten alla cui pregiata Idrodinamica allemanna egli si protesta debitore delle medesime:

Affinchè poi anche coloro, che professano l' Arte di regolare i Fiumi, aver possano di che rimanere in parte soddisfatti, egli si è avvisato di aggiugnere alle sue Lezioni

l'

l' ingegnosa Memoria sul Movimento delle acque pei fiumi *del celebre Matematico di Ferrara Sig. Bonati, pubblicata l' anno scorso nel secondo tomo degli* Atti della Società Italiana; *Memoria, che per le nuove importanti vedute, e pel ponderato esame di tutti i metodi soliti praticarsi nella misura delle acque correnti giustifica la riputazione, di cui gode da gran tempo il Sig. Bonati in Italia, di uno de' più esperti e giudiziosi regolatori de' Fiumi.*

Finirò colle parole del grand' Eulero nella Prefazione de' suoi Supplementi al Libro Inglese di Robins sopra l' Artiglieria: " *Quanto* " *riesca incompleta e mancante quel-* " *la trattazione d' Idrostatica e I-* " *draulica, la quale unicamente si fon-* " *da sopra le parti più elementari* " *e comuni della Matematica, chi-*

,, unque

» *unque potrà di leggieri convincer-*
» *sene, il quale ſi provi soltanto a*
» *formarſi una chiara e diſtinta idea*
» *del caso il più facile ed il più*
» *semplice: imperciocchè il moto*
» *de' corpi fluidi è una delle ma-*
» *terie più difficili e più complica-*
» *te, che mai s' incontrino nella*
» *Matematica e nella Fiſica, e con*
» *una volgare notizia della sola*
» *Matematica più elementare non*
» *è poſſibile di arrivare a nulla di*
» *esatto in queſta materia..... Ba-*
» *ſta dare un' occhiata alle Opere*
» *de' due Sig. Bernoulli, Padre,*
» *e Figlio, per conoscere immanti-*
» *nente, che senza la più Sublime*
» *Matematica niente può sperarſi di*
» *preciso e determinato nell' Idrodi-*
» *namica.* » *Così l' Eulero.*

IN-

INDICE

DI TUTTE LE MATERIE CONTENUTE NELL' OPERA

IDRODINAMICA

DEL SIG. ABATE BOSSUT

PAR-

PARTE II.

ELEMENTI D' IDRAULICA

LEZIONI

DEL P. FONTANA

in forma di supplementi

PARTE I.

PAR.

PARTE II.

SAG-

SAGGIO

DEL SIG. BONATI

APPENDICE

DEL P. FONTANA

TRAT-

TRATTATO ELEMENTARE D' IDRODINAMICA.

NOZIONI GENERALI.

1. L' Idrodinamica è in generale una ſcienza, che ha per oggetto le leggi dell' equilibrio, e del moto de' fluidi. La parte di queſta Scienza, che conſidera l' equilibrio de' fluidi, ſi chiama *Idroſtatica*, e quella, che conſidera il loro moto, diceſi *Idraulica*.

2. Si chiama *fluido* un ammaſſo di molecole affatto ſciolte, indipendenti le une dalle altre, e perfettamente mobili per ogni verſo: tali ſono l' acqua, il mercurio (*), l' aria, la fiamma, ec.

(*) Il mercurio è realmente una ſoſtanza metallica; ma essendo abitualmente nello ſtato di fluidità, lo riguardiamo, sotto un tal punto di viſta, come un vero fluido.

In questa definizione si considerano i fluidi come dotati d' una perfetta fluidità; ma fisicamente parlando, non havvi fluido, le di cui parti non sieno aderenti le une alle altre con una certa forza, che non è la stessa in tutti, e che può variare in un medesimo fluido, pel caldo, pel freddo, o per altre cause fisiche. Di questa aderenza ne abbiamo continuamente sott' occhio le prove. Se gettasi dell' acqua sul pavimento, le molecole sparpagliandosi hanno della difficoltà a separarsi; quando lasciasi cadere un fluido goccia a goccia, si vede che le sue parti formano una specie di filetto più o meno sensibile; diversi globetti di mercurio, che vengono a toccarsi, s' uniscono insieme e sembrano formare un sol tutto; ec. Egli è verisimile che la qualità, di cui si tratta, sia prodotta dall' asprezza delle parti fluide, combinata coll' attrazione reciproca, ch' esse esercitano le une sopra le altre. Non è mio scopo d' internarmi in questa quistione, nè d' esaminare in che consista la natura della fluidità, nè qual possa essere la figura delle molecole fluide, nè se queste molecole abbiano per qualche causa segreta ciò, che chiamasi *moto interno*, indipendente da quelli, che la gravità, o altre forze cognite possono loro comunicare. Lascio ai Fisici tutte queste ricerche, sulle quali si può proporre poco più che delle congetture.

Alcuni autori distinguono il *liquido* dal

flui-

fluido, come la ſpecie dal genere. Secondo queſti un corpo è *fluido*, allorquando le ſue parti non ſono avvinte tra eſſe, che cedono facilmente al toccarle, e che quaſi da ſe ſteſſe ſi ſpianano. In queſto ſenſo l'arena ſottile, la cenere, qualunque ammaſſo di minuti granellini, ec. ſono *fluidi*. Ma aggiungono eſſi, affine che un corpo ſia *liquido*, biſogna inoltre, che le ſue parti ſieno talmente mobili, e che pel proprio peſo ſi equilibrino in modo, che ſe ſono in ſufficiente quantità, ſi ſpianino, e formino una ſuperficie orizzontale. Io non ammetterò queſta diſtinzione; e per ſecondar l'uſo più generalmente adottato confonderò il liquido col fluido in modo, che avendo a ſignificare un *liquido* lo chiamerò indiſtintamente *liquido* o *fluido*. Non ſi fa quiſtione in queſto trattato che de' fluidi propriamente detti, e non già degl' imperfetti, come ſono l'arena, la cenere, ec.

3. Tutti i fluidi conoſciuti poſſono dividerſi in fluidi incompreſſibili, ed in fluidi elaſtici.

Si chiamano *fluidi incompreſſibili* quelli, di cui non ſi può nè aumentare, nè diminuire il volume, applicandovi le forze ordinarie di preſſione, o percuſſione. Tale è per eſempio l'acqua. Di fatti ſecondo l'eſperienza de' primi Accademici di Firenze, ripetuta poi da tutti i Fiſici, ſe ſi racchiude dell' acqua in una palla ſcavata, d' oro, d' argento, di rame, di ſtagno, o di piombo; e poſcia per condenſare l' acqua,

o per diminuire lo ſpazio, ch' ella occupa, ſi comprime fortemente la palla per mezzo d' un torchio, o ſi batte anche a colpi di martello: ſi troverà, che l' acqua non può ridurſi a minor volume, e che ſi fa ſtrada in guiſa di ruggiada a traverſo l' involto, che la contiene, anzichè diminuire in volume. Lo ſteſſo ſuccede del vino, del mercurio, ec. Ma ſi oſſerverà, che queſto effetto impoſſibile per i mezzi indicati, o che almeno non potrebbe divenir ſenſibile ſe non impiegando forze molto più grandi, che non lo permettono nè la natura de' noſtri agenti, nè quella delle materie, di cui ſi fa uſo in queſte eſperienze, ſi oſſerverà, dico, che queſto effetto s' ottiene aſſai facilmente, e con molta preſtezza per l' azione del caldo o del freddo. Così, a maſſa eguale, l' acqua calda occupa un maggior volume che l' acqua fredda; il mercurio, che ſi tenterebbe invano di condenſare o di dilatare per mezzo di peſi o di percoſſe, è eſtremamente ſenſibile alle impreſſioni del freddo e del caldo: ſi condenſa per l' uno, e ſi dilata per l' altro, con una grande mobilità, come ſe ne può giudicare da' Termometri a mercurio.

Si vede perciò, che relativamente ai fluidi incompreſſibili, le forze ordinarie di compreſſione, o di percuſſione devonſi riguardare come nulle per rapporto alle forze d' eſpanſione, o di contrazione, prodotte dall' azione del caldo o del freddo.

Flui-

Fluidi elaſtici ſono quelli, che poſſono ridurſi in un volume più, o men piccolo, ſecondo che ſono più o meno compreſſi. Per eſempio, un pallone d'aria, che ſi comprime colle mani, diminuiſce di volume, poi ſi diſtende allorchè la compreſſione ceſſa o diminuiſce. Sopra di che ſi dee oſſervare, che pel medeſimo effetto è ancor più potente l' azione del caldo e del freddo, che non ſia la compreſſione: così l' aria, che ſi riſcalda, dilataſi, o tende a dilattarſi prontiſſimamente, e s' eſſa è rinchiuſa, acquiſta una forza elaſtica maggiore: il medeſimo fluido poi ſi condenſa per l' azione del freddo.

Non v' è biſogno d' avvertire, che queſte due claſſi di fluidi non devono riguardarſi come geometricamente ſeparate l'una dall' altra. Fluidi perfettamente incompreſſibili, o perfettamente elaſtici non eſiſtono; nella natura tutto va per gradazione; ma qualche volta ſiamo obbligati ad eſaminare nelle noſtre ricerche i caſi eſtremi, affine di meglio diſtinguere gli effetti relativi alle differenti qualità, che poſſono trovarſi in un corpo, ed aſſegnare a ciaſcuna di queſte qualità le funzioni ſue proprie, e non quelle d' un' altra.

4. Un fluido qualunque, che ha la medeſima denſità in tutta la ſua eſtenſione, o che è compoſto di parti tutte della medeſima natura, ſi chiama *fluido omogeneo*. Tale per eſempio è una parte d' acqua: egli è vero che le parti

del fondo ſono più premute, che quelle della ſuperficie, ma queſto eccesſo di preſſione non diminuiſce punto il volume, nè punto aumenta la denſità; e l'acqua è compoſta altronde, in tutta la ſua eſtenſione, di parti eguali e ſimili. L'aria è pure un fluido omogeneo, ſebbene ne' luoghi baſſi abbia (a ragione d'una maggior carica prodotta dal ſuo proprio peſo) una maggiore denſità, che ne' luoghi elevati; poichè eſſa è compoſta di parti uguali, e ſimili in tutta l'eſtenſione dell'atmosfera. Ciò non pertanto oſſerveremo, che per eſprimere ſpecialmente queſte ſorti di fluidi, la di cui denſità varia, ſenza che le loro parti cangino di natura, ſi dovrebbero chiamare *fluidi omogenei di denſità variabile*.

Un fluido, che foſſe compoſto di più fluidi differenti, come per eſempio, d'uno ſtrato di mercurio, d'uno di acqua, d'uno di olio ec. ſi chiamerebbe *fluido eterogeneo*.

Quando diremo ſemplicemente fluido, intenderemo ſempre un fluido omogeneo; e ſi ſottintenderà pure, che la ſua denſità ſia coſtante a meno che formalmente non ſi enunci, o indichi il contrario.

PAR-

PARTE PRIMA.

ELEMENTI D' IDROSTATICA.

CAPO PRIMO.

Principj generali dell' equilibrio de' Fluidi.

5. Qualunque sieno il numero, la quantità, e la direzione delle forze, che agiscono sopra un corpo solido, o sopra un sistema di corpi solidi, si possono sempre rappresentare le condizioni dell' equilibrio, o del moto con formole analitiche più o meno semplici, secondo che più o meno lo sono le condizioni del problema; e se in un gran numero di casi queste formole si trovano troppo complicate, per essere suscettibili d' applicazioni soddisfacenti, ed usuali, si deve imputare quest' inconveniente all' imperfezione dell' analisi, e non alla meccanica, che ha dato tutto ciò, che si poteva da essa richiedere. La quistione non è nei medesimi termini per i fluidi; poichè noi non conosciamo nè il numero, nè la massa, nè la figura, nè il volume degli atomi, che compongono un fluido, e per conseguenza ci troviamo assoluta-

mente incapaci di sottomettere direttamente al calcolo l'azione, e la reazione, che le molecole d'un fluido esercitano le une sopra le altre in virtù di forze, che le incalzano. Altronde poi, quand'anche si potessero formare le equazioni del Problema, la pratica non ne trarrebbe alcuna utilità, a motivo della loro complicazione necessaria, ed assolutamente insuperabile dall'analisi. Bisogna dunque stabilire le leggi dell'equilibrio, e del moto de' fluidi, dietro qualche proprietà primordiale, comune a tutti i fluidi, e provata dall'esperienza. Ora, tra le proprietà de' fluidi, quella, che sembra la più semplice, e che deriva più intimamente dalla loro natura, si è che una massa fluida non potrebbe stare in equilibrio, se qualunque particella non provasse per ogni verso un'eguale pressione. Prenderemo noi dunque questo principio per base dell'Idrostatica.

TEOREMA I.

6. *Quando una massa fluida è in equilibrio: da qualunque forza le sue parti possano essere animate, ciascuna molecola, o porzione infinitamente piccola della massa è egualmente premuta per ogni verso.* E reciprocamente, *se ciascuna molecola è ugualmente premuta per ogni verso, tutto il sistema sarà in equilibrio.*

Poichè 1.° siccome tutte le particelle d'un fluido sono indipendenti le une dalle altre, e per-

perfettamente mobili per ogni verso, egli è visibile, che se una molecola qualunque fosse meno premuta da una parte, che da un' altra, essa necessariamente si moverebbe verso la parte, dove la pressione fosse minore, e non vi sarebbe più equilibrio nel sistema; ciò che è contro l' ipotesi.

Questa legge è dimostrata dall' esperienza; poichè se alla medesima profondità d' un fluido contenuto in un vaso si fa nelle pareti di questo un' apertura, e ad essa si applica uno stantuffo per impedirne l' evacuazione, questo stantuffo sarà respinto dal fluido con la stessa forza o sia l' apertura orizzontale, o comunque inclinata all' orizzonte. Tutto ciò è egualmente vero, sì per i fluidi incompressibili, che per i fluidi elastici. Sopra di che si osserverà, che può accadere fisicamente, che, per l' aderenza reciproca delle particelle, sussista l' equilibrio, quand' anche una molecola fosse un po' meno premuta da una parte, che da un' altra; ma questa inegualità di pressione non può essere, che estremamente piccola; e la proposizione enunciata è rigorosamente vera per i fluidi nello stato di fluidità perfetta, quale qui la consideriamo.

2.° Egli è egualmente evidente, che se ciascuna molecola del fluido è del pari premuta per ogni verso, essa rimarrà in quiete; d' onde ne risulterà di mano in mano da una mo-

le-

lecola all' altra la quiete, o l' equilibrio in tutta l' estensione della massa.

7. Si vede da questa proprietà la differenza, che si dee porre tra l' equilibrio de' solidi, e quello de' fluidi. Ne' corpi solidi la connessione delle parti fa, che una forza, applicata a un punto qualunque, spinga parallelamente tutta la massa, e per conseguenza vi sarà equilibrio, se a questa forza se ne oppone direttamente un' altra, che le sia uguale: ne' fluidi, se ciascuna goccia presa separatamente non è del pari premuta per ogni verso, essa si stenderà verso le parti dove le pressioni saranno men forti. Supponiamo, per esempio, che ad una goccia fluida sieno applicate due forze eguali, direttamente opposte, e due altre forze, pure tra se uguali, direttamente opposte, e perpendicolari alle due prime; che le due prime sieno rappresentate ciascuna dall' 1, e le due altre ciascuna dal 2: la goccia non starà in equilibrio; ella s' allungherà verso la forza 1, e s' appianerà dalla parte della forza 2; inoltre le sue parti scapperanno pei vuoti, compresi tra le forze 1 e 2. Ora se la goccia fosse un corpo solido, essa starebbe evidentemente in equilibrio. Così, riguardandola come fluida, ella forma un ammasso di particelle, il di cui numero, e figura sono tali, che la goccia non può stare in equilibrio, se in ciascun punto, e per ogni verso non è ugualmente premuta.

8.

TEOREMA II.

8. *Se in un luogo qualunque* M (Fig. 1.) *d' un vaso* ABCD, *chiuso da tutte le parti, e pieno di liquido, si fa un' apertura, alla quale si applichi uno stantuffo, cacciato con una forza* P, *l' azione di questa forza si trasmetterà per ogni parte a traverso la massa fluida; e ciascun punto d' una goccia qualunque* fgkh *soffrirà la medesima pressione, che ciascun punto immediatamente contiguo alla testa dello stantuffo.* Fig. 1.

Questa è ancora una conseguenza della perfetta mobilità delle particelle fluide, la quale fa, che l' azione della forza *P* si trasmetta successivamente, e senza alterazione in tutta l' estensione del fluido.

COROLLARIO I.

9. Ne segue di quì, che, se si fa in *N* una seconda apertura, alla quale sia applicato uno stantuffo, cacciato con una forza *Q*, vi sarà equilibrio, ossia nè l' uno, nè l' altro stantuffo potrà internarsi, purchè le forze *P* e *Q* sieno tra esse come le aperture *M* ed *N*, cioè purchè si abbia *P* : *Q* : : *M* : *N*. Poichè la pressione di ciascun punto di *M* si trasmette a ciascun punto di *N*, e reciprocamente la pressione di ciascun punto di *N* si trasmette a ciascun punto di *M*; dunque, perchè vi sia equilibrio, bisogna, che queste pressioni elementari sieno

ſieno eguali. Ora la ſomma delle preſſioni di M, oſſia la forza P è proporzionale ad M, e la ſomma delle preſſioni di N, oſſia la forza Q è proporzionale ad N; dunque, poichè queſte due forze P e Q ſono compoſte di forze elementari eguali, ſi ha $P : Q :: M : N$.

COROLLARIO II.

10. Si vede ſimilmente, che in virtù della forza P, o Q, la faccia qualunque fg della goccia $fgkh$ ſoffre una preſſione, che ſi eſprime con $P \times \frac{fg}{M}$, o con $Q \times \frac{fg}{N}$: poichè la preſſione di ciaſcun punto di M, o di N ſi traſmette a ciaſcun punto di fg; e ciaſcun punto di fg riagiſce parimente, con la medeſima forza, contro ciaſcun punto di M, o di N; dunque, chiamando p la preſſione totale contro fg, ſi avrà $P : p :: M : fg$, e $Q : p :: N : fg$; dunque $p = P \times \frac{fg}{M}$, o $p = Q \times \frac{fg}{N}$.

11. Ne' tre articoli precedenti conſideriamo ſemplicemente gli sforzi, che provengono dalle forze eſteriormente applicate agli ſtantuffi; inſegneremo ora a miſurare gli sforzi, che provengono dalla gravità ſteſſa del fluido.

TEOREMA III.

12. *La ſuperficie d'un liquido, abbandonato all'azione libera della ſua gravità, ed in equilibrio*

in

in u. ABCD, (Fig. 2.) *che lo contiene, è perp. lare in ciascuno de' suoi punti alla direzione de. ravità stessa.* Fig. 2.

Sia A D la superficie libera del fluido: una particella qualunque *m* è premuta dalla gravità secondo la direzione *mn*; rappresentiamo questa forza con *mn*, e decomponiamola in due altre *mp*, *mq* prese nella direzione dei due elementi della curva *AmD*, contigui al punto *m*. Ora, affine che la particella *m* rimanga in quiete, è d' uopo, ch' essa sia egualmente spinta per ogni verso (6); dunque le due forze *mp*, *mq* sono uguali tra se, ed alla forza *mn*; dunque la forza *mn* divide in due parti uguali l'angolo *pmq*; dunque essa non inclina più sull' elemento *mp*, che sull'elemento *mq*, o, ciò che è lo stesso, essa è perpendicolare in *m* alla curva *AmD*. E siccome la medesima perpendicolarità della gravità ha egualmente luogo in tutti gli altri punti della curva *AmD*, dobbiamo concludere, che reciprocamente la superficie *AmD* del fluido è perpendicolare in ciascuno de' suoi punti alla direzione della gravità.

COROLLARIO.

13. Dunque, se le direzioni delle gravità di tutte le molecole del fluido vanno a concorrere in un medesimo punto, la curva *AmD* sarà un arco di cerchio, ossia la superficie del fluido sarà parte d' una superficie sferica, il di cui

cui centro è il punto verso il quale tendono tutte le molecole.

Allorchè le dimensioni della superficie d'un fluido sono picciolissime per rapporto al raggio della terra, questa superficie può riguardarsi come un piano, poichè allora il centro della terra, dove le direzioni delle gravità delle molecole del fluido vanno a concorrere, può riguardarsi come situato a una distanza infinita. Tale è la superficie d'un volume d'acqua della vasca d'un giardino, ec.

TEOREMA IV.

Fig. 3. 14. *Se un sifone* KMNO (Fig. 3.), *di figura qualunque contiene ne' suoi bracci, comunque uguali o disuguali, dell' acqua, o qualsivoglia altro fluido, le superficie* AB, DE *di questo fluido ne' due bracci del sifone saranno a livello, cioè a un medesimo piano orizzontale.*

Fig. 4. Figuriamoci, nella vasca *FGHL* (Fig. 4.), un sifone *KMNO* perfettamente uguale al proposto, ed immaginiamci poscia, che l'acqua della vasca, a riserva della parte *ABMNED* corrispondente al sifone fittizio, s' indurisca, senza però cangiare nè di luogo, nè di volume; egli è chiaro, che la porzione dell' acqua, rimasta liquida, sarà nel medesimo stato di compressione, e di ristagnamento, in cui era prima che il rimanente della massa s' indurisse, e che per conseguenza le due superficie *AB*, *DE* saranno

a

a livello. Ora tutto è lo ſteſſo ne' due ſifoni delle figure 3 e 4; dunque le ſuperficie *AB*, *DE* eſſendo a livello nel tubo della figura 4, lo ſono anche in quello della figura 3.

COROLLARIO.

15. Il meccaniſmo de' ſifoni ſi applica ad una infinità di fenomeni della natura. Così p. e. ſe ſi ſcava un pozzo nella vicinanza d'uno ſtagno, d' un mare, d' un fiume, ec., l' acqua aſcenderà in queſto pozzo, e ſi metterà a livello coll' acqua circonvicina, poichè il pozzo, ed il ſerbatojo vicino poſſono riguardarſi come i due bracci verticali d' un tubo, i quali comunichino inſieme per mezzo delle feſſure, e crepature, che ſi trovano nell' interno della terra. Così l' acqua, che ſi conduce da un punto ad un altro per mezzo d' un lungo canale, come p. e. l' acqua deſtinata a formare una fontana pubblica, ſi metterebbe a livello ne' due eſtremi dell' acquidotto, ſe il punto d' arrivo foſſe egualmente elevato che quello, da cui l' acqua parte; ma quando il punto d' arrivo ſia più baſſo, che quello da dove parte l' acqua, allora queſta decorre liberamente, e forma la fontana deſiderata.

16. L' arte di livellare per mezzo dello ſtromento chiamato *livello d' acqua* è fondata ſulla propoſizione precedente. Non è mio oggetto d' inſegnare quì la ſcienza di livellare,

che

che si può imparare in altre opere, ed in particolare nel *Traité de M. l'Abbé Picard;* ma credo dovere spiegare brevemente un metodo comodissimo di tenere lo stato d'una livellazione, e di risparmiare la fatica di fare una moltitudine di profili.

Fig. 5. Sieno (Fig. 5) *A*, *B*, *C*, *D*, *E* un numero qualunque d'oggetti, di cui si vuole determinare la posizione rispettiva, per rapporto ad un medesimo piano orizzontale. Consideriamo questi oggetti come se fossero collocati al fondo d'un mare, di cui *MN* fosse il livello; egli è chiaro, che la posizione dei punti proposti sarà conosciuta per rapporto al piano orizzontale *MN*, se si arriva a conoscere le linee verticali *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*. Figuriamci, che il piano *MN* sia elevato sopra il punto *A*, da cui s'incomincia, d'una quantità data, ed arbitraria, p. e. di 100 piedi: scrivete 100 al punto *A* sopra una carta, o uno scartafaccio, che serva a rappresentare, almeno grossolanamente, il terreno. Lo stromento da livellare essendo collocato in *A*, l'Osservatore in *B*, la prima battuta vi farà conoscere di quanto il punto *A* sia più elevato, che il punto *B*: supponiamo, che questa elevazione sia di 3 piedi; scriverete sulla carta 103 al punto *B*, ciò che indica, che, essendo la verticale *Aa* di 100 piedi, la verticale *Bb* è di piedi 103. Trasportate lo stromento da *A* in *B*, e ri-

riguardate il punto *B* come il punto d' incominciamento; la battuta da *B* in *C* vi farà conoscere di quanto il punto *B* sia più elevato che il punto *C*; sia questa elevazione di 4 piedi e 6 pollici; scriverete sulla carta al punto *C* 107 piedi 6 pollici per il valore di *Cc*. Continuando sempre ad operare nella stessa maniera, arriverete a determinare successivamente i lati degli altri punti; suppongo che i lati trovati sieno tali, quali la figura 5.ª li rappresenta. Volete ora sapere di quanto il punto *A* è più elevato del punto *C*? Levate il lato di *A* da quello di *C*, cioè 100 piedi da 107 piedi 6 pollici, il resto 7 piedi 6 pollici è l'altezza dimandata. Volete sapere di quanto il punto *A* è più elevato del punto *E*? Levate 100 piedi da 104, il resto 4 piedi è l' altezza dimandata, ec.

Occorre di dovere non solamente livellare un terreno, cioè determinare la posizione degli oggetti per rapporto ad un piano orizzontale, ma misurare ancora le distanze degli oggetti, e gli angoli, che queste distanze formano tra esse, per avere la rappresentazione completa del terreno.

SCOLIO.

17. Si deve notare, che la proposizione dell' articolo 14.º soffre una restrizione nello stato naturale, e fisico de' fluidi. Affinchè il liquido si metta realmente a livello, ne' due

bracci del sifone, bisogna, ch' essi abbiano l'uno e l' altro una certa grossezza, senza che nulladimeno sia perciò necessario, che essi abbiano la medesima capacità, nè la medesima figura. Ma quando l' uno dei bracci è assai sottile, sicchè p. e. il suo diametro non ecceda 2 linee in circa, mentre quello dell' altro è considerabilmente più grande, allora il liquido non si mette più a livello ne' due bracci. La maggior parte dei liquidi, come il vino, l' acqua, l' olio, lo spirito di vino, ec., ascendono più alto nel piccolo braccio (che si chiama capillare dalla voce latina *capillus*, capello), che nell' altro: al contrario il mercurio sta più basso nel braccio capillare, che nel braccio grande. Questi fenomeni hanno una causa particolare, la di cui ricerca appartiene alla fisica. Io quì fo astrazione da questa causa, e considero i fluidi come semplicemente sottoposti all' azione della gravità, che li caccia verso il centro della terra; d' onde ne segue, che allora devono sempre mettersi a livello ne' due bracci del sifone, qualunque sia il rapporto dei diametri di questi bracci.

TEOREMA V.

Fig. 6. 18. *Essendo in quiete un liquido contenuto in un vaso* ABCD (Fig. 6.), *e sottoposto alla sola azione della gravità; una particella qualunque* m *è egualmente premuta per ogni verso con una for-*

forza uguale al peso della piccola colonna om *che le corrisponde verticalmente*.

In fatti, 1.° la particella *m* è egualmente premuta per ogni verso, altrimenti non sarebbe in equilibrio (6).

2.° La pressione, ch'ella soffre è eguale al peso assoluto della piccola colonna *om*; imperciocchè, se si concepisce, che la massa intiera del fluido, eccetto la colonna *om* venga ad indurirsi, senza cangiar nè di luogo, nè di volume, la particella *m* resterà sempre nel medesimo stato di pressione come prima. Ora, quando il solo filetto *om* è fluido, essendo indurito il restante della massa, ella porta evidentemente il peso intiero di questo filetto *om*. Dunque la misura della pressione, ch' ella soffre in tutti i versi, è il peso assoluto della medesima colonna *om*.

COROLLARIO I.

19. Immaginiamoci una curva qualunque *FmQ* (Fig. 7.), che tocchi la particella *m* dalla parte della parete *AB*, e supponiamo, che la porzione del liquido *AFmQB* s' indurisca senza poter cambiare nè di luogo, nè di volume: la particella *m* è sempre compressa per ogni verso nella medesima maniera, che se la massa intiera fosse rimasta fluida. Si può anche concepire, senza turbare l' equilibrio, che la porzione qualunque *DHSC* di liquido sia

Fig. 7.

anch' essa indurita. Dunque se si ha un vaso qualunque *FQSH* (Fig. 8.), un punto qualunque *m* delle sue pareti è premuto dal fluido con una forza uguale al peso assoluto del piccolo filetto verticale *om*, che andrebbe a terminare alla superficie del fluido, prolungata se fa bisogno; poichè si può riguardare il liquido del vaso *FQSH* (Fig. 8.) come la porzione *FQSH* di liquido del vaso rappresentato (Fig. 7.), essendo supposte indurite le due porzioni *AFmQB*, *DHSC*.

Fig. 8.

COROLLARIO II.

20. Sia *my* una parte qualunque infinitamente piccola delle pareti del vaso *FQSH* (Fig. 8.): la pressione perpendicolare, che questa parte soffre, è in ragione composta del numero delle molecole, che coprono la piccola superficie *my*, e dell' altezza verticale *om*, che può riguardarsi come la stessa per tutti i punti dell' elemento *my*. Così chiamando *p* la gravità specifica del liquido, la pressione, di cui si tratta, sarà espressa da $p \times om \times my$, giacchè il peso assoluto è il prodotto della gravità specifica per il volume.

TEOREMA VI.

21. *Essendo in quiete un liquido contenuto in un vaso* ABCD (Fig. 9.), *e sottoposto alla sola azione della gravità: la somma delle pressioni perpendicolari, che sof-*

Fig. 9.

soffrono tutti gli elementi d' una parte qualunque finita fnr *del fondo o delle pareti del vaso, è uguale al peso assoluto d' una colonna, che avrebbe per base la superficie* fnr, (*convertita in una superficie piana, se fa bisogno*) *e per altezza la distanza verticale* GO *del centro di gravità* G *della medesima superficie* fnr *dalla superficie* AD *del fluido.*

Dividete la superficie fnr in una infinità d' elementi fg, gx, xy, ec. e conducete le verticali ft, gu, xz, ec. alla superficie del fluido. Chiamando p la gravità specifica del fluido, le pressioni perpendicolari, che soffrono gli elementi fg, gx, xy, ec. vengono rappresentate rispettivamente dai prodotti $p \times fg \times ft$, $p \times gx \times gu$, $p \times xy \times xz$, ec. (20). Ora se si considerano questi prodotti come i momenti di tanti piccoli pesi, per rapporto al piano di livello del liquido, si avrà (come è noto dalla Statica) $p \times fg \times ft + p \times gx \times gu + p \times xy \times xz +$ ec. $= p \times (fg + gx + xy +$ ec. $) \times GO$ $= p \times fnr \times GO$; il che si riduce all' enonciazione del Teorema.

COROLLARIO I.

22. Dunque se il fondo BC (Fig. 10, 11, 12) d' un vaso, di figura qualunque, è orizzontale, la pressione, che esso soffre, è espressa da $p \times BC \times GO$, denotando p la gravità specifica del fluido, e GO la verticale condotta dal centro di gravità G del fondo BC

Fig. 10, 11, 12.

 alla

alla ſuperficie del fluido, prolungata ſe ſa biſogno.

Quindi ſi vede, che ſe i fondi de' tre vaſi rappreſentati dalle Figure 10, 11, 12, ſono uguali, e che lo ſteſſo liquido ſia alla medeſima altezza ſopra il fondo ne' tre vaſi ſteſſi, ſi vede, dico, che i fondi ſoffriranno preſſioni uguali. Egli è di fatti evidente, che ſe ſi conducano (Fig. 11, 12.) le verticali *Bm*, *Cn*, e in ſeguito ſi ſupponga (Fig. 11.), che, le due porzioni di liquido *ABm*, *DCn* s' induriſcano conſervando ſempre il medeſimo luogo, ed il medeſimo volume, e che (Fig. 12.) eſſendo ſuppoſti riempiti di liquido gli ſpazj *ABm*, *DnC*, ſi diſtruggano le pareti *AB*, *DC*, tutto rimane lo ſteſſo di prima, e i tre fondi debbono eſſere egualmente premuti.

COROLLARIO II.

23. Può dunque ſuccedere, che la preſſione del fondo d' un vaſo, ed il peso totale del liquido contenuto nel vaſo iſteſſo ſieno coſe differentiſſime. Nel vaſo cilindrico della Fig. 10.ª la preſſione del fondo è uguale al peſo di tutto il liquido; ma ne' vaſi delle Fig. 11. e 12. la prima forza è minore, o maggiore della ſeconda.

Quando ſi ha un vaſo pieno d' acqua da ſollevare verticalmente, o da ſoſtenere ſopra un piano inclinato, biſogna avere riguardo, nel

cal-

calcolo della potenza, al peso assoluto dell'acqua, e del vaso, e non alla pressione contro il fondo, e contro le pareti; poichè allora si può considerare, in ciascun istante, il sistema come se formasse una sola, e medesima massa solida.

COROLLARIO III.

24. Sia DC (Fig. 13.) l'altezza d'una superficie rettangolare verticale, come p. e. della porta d'una chiusa esposta alla pressione della massa delle acque stagnanti $DABC$, di cui l'estensione orizzontale DA può essere grande, o piccola come si vorrà, essendo ciò assolutamente indifferente riguardo all'effetto della pressione. Chiamiamo a il suo lato orizzontale, onde la superficie sarà $DC \times a$. Sia G il mezzo, o il centro di gravità di questa superficie. Ciò posto, 1.° la pressione perpendicolare, che sopporta la detta superficie è $p \times a \times DC \times GD$, ossia $p \times a \times \frac{(DC)^2}{2}$, essendo p la gravità specifica dell'acqua. Così, per fare un' applicazione particolare, se si suppone $a = 3$ piedi, $DC = 12$ piedi, e conseguentemente $a \times \frac{(DC)^2}{2} = 216$ piedi cubici, e si osservi, che il piede cubico d'acqua dolce pesa 70 libbre, ciò che dà $p = 70$ libbre, prendendo il piede cubico per l'unità di misura del volume si tro-

Fig. 13.

verà, che la pressione $p\times a\times \frac{(DC)^2}{2} = 15126$ libbre.

2 Per trovare il *centro* P *di pressione*, cioè il punto, per cui passa la risultante di tutte le pressioni contro tutti i punti del piano $DC\times a$, divido questo piano in una infinità d' elementi $Rr\times a$, ed osservo, che il momento della pressione totale $p\times a\times \frac{(DC)^2}{2}$ dovendo essere uguale (per i principj di Statica) alla somma dei momenti delle pressioni elementari contro tutte le areole $Rr\times a$, si ha l' equazione $p\times a\times \frac{(DC)^2}{2}\times PD = \int p\times a\times Rr\times DR\times DR$, ossia $\frac{(DC)^2}{2}\times PD = \int Rr\times (RD)^2$. Ora la somma delle quantità $Rr\times (RD)^2$, presa in tutta l' altezza DC compone evidentemente una piramide, la di cui base $= (DC)^2$, e l' altezza $= DC$. Dunque $\frac{(DC)^2\times PD}{2} = \frac{(DC)^3}{3}$; e per conseguenza $PD = \frac{2}{3} DC$. Il centro di pressione è dunque collocato ai due terzi dell' altezza DC contando dalla superficie del fluido, e supponendo, come è evidente, che questa DC divida perpendicolarmente per metà il lato orizzontale a. Questo punto è quello del maggiore sforzo delle acque, e conseguentemente, il luogo dove bisognerebbe applicare perpendico-

co-

colarmente la forza destinata a sostenere la spinta delle acque, essendo altronde la superficie $DC\times a$ supposta perfettamente libera, e priva d'ogni altro appoggio.

COROLLARIO IV.

25. Si è veduto (9), che le due potenze P, e Q (Fig: 1.) applicate ai due stantuffi comprimenti un fluido contenuto in un vaso chiuso da tutte le parti, eccetto che in M ed N, devono stare tra se come le aperture M ed N, affine di scambievolmente equilibrarsi; ciò che dà $Q = P \times \frac{N}{M}$. Supponiamo ora, che la potenza applicata in N abbia non solamente a contrabbilanciare la potenza P, ma ancora la pressione, che risulta contro N in virtù del peso del fluido: allora quest' ultima pressione essendo $p \times N \times ND$, dove p esprime la gravità specifica del fluido, egli è chiaro, che la potenza applicata in N dovrà avere per valore $P \times \frac{N}{M} + p \times N \times ND$.

Fig. 1.

TEOREMA VII.

26. *Due fluidi di differente specie* AFIG; EDMK (Fig. 14.), *le di cui basi* AF, ED *sono a livello, e le di cui pressioni esercitandosi sopra*

Fig. 14.

ſopra il fluido qualunque interpoſto ABCD *ſi equilibrano ſcambievolmente, hanno le altezze* AH, EK *reciprocamente proporzionali alle loro ſpecifiche gravità.*

Di fatti, le preſſioni de' due fluidi *AFIG*, *EDMK* ſopra le loro baſi devono riguardarſi come peſi, che, premendo la ſuperficie del fluido *ABCD*, ſi equilibrano; e per conſeguenza (9) queſte preſſioni ſono tra ſe come le baſi *AF*, *ED*. Ora chiamando p la gravità ſpecifica del fluido *AFIG*, H la ſua altezza AH, ϖ la gravità ſpecifica del fluido *EDMK*, h la ſua altezza EK, le preſſioni, di cui ſi tratta, sono riſpettivamente (22) $p \times H \times AF$, $\varpi \times h \times ED$. Così ſi ha la proporzione $p \times H \times AF : \varpi \times h \times ED :: AF : ED$; da cui ſi trae $p \times H = \varpi \times h$, ed $H : h :: \varpi : p$.

Per eſempio, ſe il fluido *AFIG* è acqua, ed il fluido *EDMK* mercurio, ſi avrà, $p : \varpi :: 1 : 14$, e per conſeguenza $H : h :: 14 : 1$. D'onde ne ſegue, che per equilibrare una colonna d'acqua di 32 piedi di altezza biſogna impiegare una colonna di mercurio, che abbia un' altezza di 28 pollici circa.

COROLLARIO I.

27. Dunque se un fluido, la di cui ſpecifica gravità è ϖ, preme, ſotto un' altezza h, una ſuperficie, o un altro fluido, ſi potrà ſoſtituire a queſta preſſione la preſſione d'un fluido, la di cui specifica gravità ſia p, dando a queſt' ulti-

ultimo fluido l'altezza espressa da $\frac{\varpi \times h}{p}$.

COROLLARIO II.

28. Di quì ne segue il modo di determinare la pressione sopra la base *MN* (Fig. 15) d'un vaso che contenesse più strati di differenti fluidi *MNKD*, *DKGC*, *CGFB*, *BFEA*: poichè sieno *ML*, *LP*, *PQ*, *QA* le altezze ossia le grossezze verticali di questi strati; p, p', p'', p''' le loro specifiche gravità: la pressione del fondo *MN* sarà la stessa, che se, in vece degli strati superiori *DKGC*, *CGFB*, *BFEA*, si sostituissero altri strati simili allo strato inferiore *MNKD*, e le di cui altezze fossero rispettivamente $\frac{p' \times LP}{p}$, $\frac{p'' \times PQ}{p}$, $\frac{p''' \times QH}{p}$; dunque (22) la pressione di $MN = p \times MN \times \left(ML + \frac{p' \times LP}{p} + \frac{p'' \times PQ}{p} + \frac{p''' \times QH}{p}\right) = MN \times (p \times ML + p' \times LP + p'' \times PQ + p''' \times QH)$. Cioè, per avere la pressione del fondo *MN*, bisogna moltiplicare questo fondo per la somma de' prodotti delle altezze, e delle gravità specifiche degli strati fluidi, che sono contenuti nel vaso.

CA-

CAPO II.

Della grossezza, che devono avere i tubi conduttori per resistere alla pressione dei fluidi stagnati.

29. Si chiamano *tubi conduttori* i tubi che conducono l'acqua da un serbatojo ad un luogo più basso, per formarvi un getto d'acqua, una fontana, ec.

TEOREMA

Fig. 16. e 17.

30. *Se si hanno* (Fig. 16 e 17.) *due cilindri flessibili* ABCD, abcd, *diritti o inclinati, pieni di liquido di differente specie: le tensioni delle due circonferenze* BMNC, bmnc *delle basi, secondo le direzioni delle tangenti in ciascuno de' loro punti, saranno tra se in ragione composta de' loro raggi* BH, bh, *delle gravità specifiche de' liquidi, e delle altezze verticali dei cilindri.*

Suppongo, che le basi *BMNC*, *bmnc* sieno orizzontali, o che almeno tutti i loro punti possano in ciascun cilindro essere risguardati come egualmente distanti dalle superficie superiori dei fluidi; ciò che ha luogo nella pratica, poichè non si cercano le grossezze de' tubi, se non per quelli, le di cui altezze sono considerabili in confronto de' loro diametri.

Sieno

Sieno AB, ab le altezze verticali de' nostri due cilindri; p e ϖ le gravità specifiche de' due liquidi; F ed f le tensioni delle due circonferenze $BMNC$, $bmnc$. Egli è chiaro, che le somme delle pressioni esercitate dai fluidi $ABCD$, $abcd$, dal di dentro al di fuori, secondo le direzioni dei raggi, sopra tutti i punti delle due circonferenze $BMNC$, $bmnc$, sono espresse dai prodotti $p \times BMNC \times AB$, e $\varpi \times bmnc \times ab$. Ora (per i principj di Statica), si hanno le due proporzioni.

$$p \times BMNC \times AB : F :: BMNC : BH,$$
$$\varpi \times bmnc \times ab : f :: bmnc : bh.$$

Ma le circonferenze $BMNC$, $bmnc$ sono tra se come i loro raggi BH, bh, cioè $BMNC : BH :: bmnc : bh$. Dunque si avrà $p \times BMNC \times AB : F :: \varpi bmnc \times ab : f$, ossia $F : f :: p \times BMNC \times AB : \varpi \times bmnc \times ab$; ovvero (sostituendo alla ragione di $BMNC$ a $bmnc$ quella di BH a bh), $F : f :: p \times BH \times AB : \varpi \times bh \times ab$.

PROBLEMA.

31. *Determinare il rapporto delle grossezze, che devono avere due cilindri composti d'anelli flessibili per resistere agli sforzi di due fluidi, che tendono a romperli.*

Tagliamo i due cilindri dell' articolo precedente secondo le loro basi $BMNC$, $bmnc$, e sieno (Fig. 18 e 19.) le due corone, o anelli $BSERKM$, $bserkm$ le sezioni risultanti. Immagi-

Fig. 18. e 19.

giniamoci, che questi anelli sieno composti d'una infinità di filetti rappresentati dalle circonferenze $XYVZ$, $xyvz$: le resistenze, che essi oppongono alla loro rottura, sono evidentemente in ragione composta dei numeri de' filetti, ossia delle grossezze BS, bs, e delle tenacità delle materie, che formano i tubi. Dunque chiamando R ed r le due resistenze, di cui si tratta; E ed e le grossezze BS e bs; T e t le tenacità delle materie, di cui i tubi sono fatti: si avrà $R:r::ET:et$

Ora, affinchè vi sia equilibrio, bisogna, che le forze R ed r sieno uguali rispettivamente alle forze F ed f, di cui si è parlato nell'articolo precedente. Dunque, chiamando H ed h le altezze dei liquidi ne' due cilindri; D e d i diametri delle basi dei cilindri medesimi, si avrà $ET:et::\frac{pHD}{2}:\frac{\varpi hd}{2}$. Dunque $E:e::\frac{pHD}{T}:\frac{\varpi hd}{t}$, cioè le grossezze dei due anelli proposti sono come i prodotti delle gravità specifiche dei liquidi, delle altezze dei liquidi stessi, e dei diametri de' tubi, divisi per le tenacità delle materie, di cui i tubi sono composti.

COROLLARIO I.

32. Allorchè i liquidi sono della medesima specie, come pure le materie, di cui i tubi sono fatti, si ha $p=\varpi$, $T=t$, e la proporzione precedente diviene $E:e::HD:hd$.

co-

COROLLARIO II.

33. Se si ha $p = \varpi$, $T = t$, $D = d$, si avrà $E : e :: H : h$. Dal che si vede, che tutto il resto essendo uguale, la grossezza d'un anello deve essere tanto maggiore, quanto lo è l'altezza del fluido collocatovi sopra.

Perciò sarebbe una spesa superflua, ed affatto inutile il fare della medesima grossezza tutti i canali, che devono formare un acquidotto destinato a sostenere l'acqua ad una altezza considerabile; poichè se le parti inferiori hanno una grossezza sufficiente, come esse in fatti la debbono avere, le parti superiori sono senza dubbio troppo grosse. Questo sbaglio si commette in una infinità di occasioni: esso si commise specialmente negli antichi canali della macchina di *Marly*. Sarebbe pertanto opportuno d'avere de' canali del medesimo diametro interiore, e di tre, o quattro grossezze differenti da collocare i più grossi al basso, e successivamente gli altri a ragione delle differenti altezze dell'acqua.

SCOLIO.

34. Per poter applicare la teoria precedente alla pratica, bisogna conoscere per mezzo d'una esperienza immediata la grossezza, che un certo canale deve avere per resistere alla pressione d'un dato fluido; ed inoltre bi-

ſogna conoſçere la tenacità delle materie, di cui i canali poſſono eſſere compoſti. Gli autori, che hanno fatte esperienze di queſto genere, danno alcuna volta de' riſultati molto differenti gli uni dagli altri. Determinerò le groſſezze de' canali di piombo, e di rame, ſecondo l'eſperienza già fatta a *Versailles*, e ſecondo una propoſizione di M. MARIOTTE riferite l'una e l'altra nella raccolta intitolata: *Divers ouvrages de Mathematiques & de Phyſique par MM. de l'Academie Royale des Sciences* (Paris 1693).

L'eſperienza è, *che un canale di piombo di 16 pollici di diametro, e di linee 6 ½ di groſſezza ha ſoſtenuto 50 piedi di carico d'acqua* (pag. 516.).

La propoſizione di M. MARIOTTE *ſi è, che un canale di rame di 6 pollici di diametro, ſotto 30 piedi di carico d'acqua, deve avere ½ linea di groſſezza* (pag. 513.).

Può accadere, che le groſſezze, di cui ſi tratta, ſieno maggiori, che non ſarebbe biſogno per il ſemplice ſtato d'equilibrio; imperciocchè non ſi è detto, nella eſperienza citata, che ſi ſia diminuita la groſſezza del piombo ſino a tanto, che il canale veniſſe a crepare, nè nella propoſizione di M. *de* MARIOTTE, che ſi ſia ſottopoſto il rame alla medeſima prova. Ma ſi opera molto ſaggiamente nella pratica portando le miſure al di là dei limiti dell' equilibrio.

Applicando alle due ipoteſi precedenti la pro-

proporzione generale dell' articolo 31, $E : e :: \frac{pHD}{T} : \frac{\varpi hd}{t}$, ella diverrà $6\frac{1}{2} : \frac{1}{2} :: \frac{50 \times 16}{T} : \frac{30 \times 6}{t}$; dal che risulta $\frac{T}{t} = \frac{40}{117}$. Questo rapporto della tenacità del piombo a quella del rame è molto differente da quello, che si troverebbe paragonando insieme i pesi, che due fili, l' un di piombo, l' altro di rame, potrebbero sostenere senza rompersi. Nulladimeno nelle applicazioni, che noi faremo delle nostre formole, adotteremo l' esperienza di *Versailles*, e la proposizione di M. MARIOTTE, per essere elleno immediatamente fondate sopra elementi simili a quelli delle quistioni, che noi abbiamo a risolvere.

Esempio I. *Si propone di determinare la grossezza, che deve avere un canale di piombo di 6 pollici di diametro, e che deve sostenere lo sforzo d' una colonna d' acqua di* 100 *piedi d' altezza?*

Chiamando x la grossezza cercata, si avià $50 \times 16 : 100 \times 6 ::$ linee $6\frac{1}{2} : x =$ linee $4\frac{7}{8}$.

Esempio II. *Si domanda la grossezza, che deve avere un canale di rame di 4 pollici di diametro, per sostenere lo sforzo d' una colonna di mercurio di 30 piedi di altezza.*

La gravità specifica dell' acqua è a quella del mercurio, come 1 a 14; così impiegando la proposizione di M. de MARIOTTE, e chiamando x la grossezza cercata, si avrà $30 \times 6 \times 1 : 30 \times 4 \times 14 :: \frac{1}{2} : x =$ linee $4\frac{2}{3}$.

CAPO III.

Dell' equilibrio dell' Aria.

35. L' aria, come fluida, ha tutte le proprietà, che a questo genere di corpi appartengono: molte altre ve ne sono a lei particolari, e che l' esperienza ci ha fatto conoscere.

TEOREMA I.

36. *L' aria è un fluido pesante.*

Di fatti la gravità è una forza universale, sparsa nella natura, e non vi ha corpo, che non le sia sottoposto. Nulladimeno gli antichi, lungi dal sospettare che l' aria fosse un fluido pesante, la riguardavano come un corpo *leggiere*, cioè come un corpo di sua natura tendente a sollevarsi.

Galileo fu il primo, che abbia conosciuto la gravità dell' aria; Torricelli suo discepolo l' ha dimostrata nel 1643 con una esperienza, che i nostri Barometri ordinarj ci mettono continuamente sott' occhio.

Ognuno sa, che il Barometro è un tubo di vetro, chiuso ermeticamente in alto, aperto al basso, nel quale v' è una colonna di mercurio sospesa a certa altezza al di sopra del mercurio contenuto in un pozzetto, dove l' estremità inferiore del tubo è immersa. La causa, che

che ſoſtiene il mercurio del tubo al di ſopra del mercurio del pozzetto, è la preſſione dell'aria eſteriore ſopra la ſuperficie nel pozzetto medeſimo, preſſione, che ſopra la colonna di mercurio non ha luogo; poichè eſſendo chiuſa l' eſtremità ſuperiore del tubo, l'aria non vi può entrare. In fatti ſe ſi apre queſta eſtremità, la colonna del mercurio cade ſubito, e ſi ſpande nel pozzetto.

SCOLIO I.

37. L' altezza del mercurio nel tubo del Barometro è differente, cioe più o meno grande ſecondo che i luoghi ſono meno o più elevati per rapporto ad un medeſimo livello, come per eſempio quello del mare. La prima eſperienza di queſto genere fu quella, che PASCAL fece eſeguire ſulla montagna di *Puy de Domme* vicino a *Clermont* nell' *Alvergna*. Dal piede alla cima di queſto monte, che è elevato di 500 teſe incirca al di ſopra di *Clermont*, il mercurio s'abbaſsò nel tubo di tre pollici, una linea e mezzo.

SCOLIO II.

38. In un medeſimo luogo, l' altezza del mercurio nel tubo non è coſtante: ella varia a ragione de' cangiamenti, che accadono nel peso dell' atmosfera per la pioggia, per il vento, ec. La ſpiegazione di queſti fenomeni non appartiene al noſtro ſoggetto.

COROLLARIO I.

39. L' aria eſſendo in tal guiſa peſante, e

la sua pressione sopra ciascun punto della superficie della terra essendo equivalente al peso d'un filetto di mercurio, di cui suppongo, che si conosca l'altezza media, egli è facile di trovare il peso di tutta la massa dell'aria, che circonda il globo terrestre. Impercioccchè, sieno R il raggio del globo terrestre, r l'altezza data del filetto di mercurio, di cui si è parlato, Π il rapporto della circonferenza al diametro, ϖ la gravità specifica del mercurio. Si cercheranno le solidità delle due sfere, di cui l'una ha per raggio $R+r$, l'altra R; e si sottrarrà la seconda dalla prima, ciò che darà $\frac{4\Pi(R+r)^3}{3} - \frac{4\Pi R^3}{3}$ ossia $4\Pi\left(R^2r + r^2R + \frac{r^3}{3}\right)$ per residuo. Si moltiplicherà questo residuo per ϖ, ed osservando, che i termini, che contengono r^2 ed r^3, possono trascurarsi senza incorrere in errore sensibile, si avrà $4\varpi\Pi R^2 r$ per l'espressione generale, e molto prossima del peso dimandato.

Per esempio, sia $r = 28$ pollici; il peso d'un piede cubico di mercurio $= 960$ libbre. Supponiamo inoltre, secondo le osservazioni, che ciascun grado di circolo massimo della terra sia di 57000 tese. Si troverà effettuando tutto il calcolo indicato dalla formola precedente, che il peso totale dell'atmosfera è di 11028854877090909091 libbre in circa.

co-

COROLLARIO II.

40. Due colonne, l'una di mercurio, l'altra di acqua, che si fanno scambievolmente equilibrio, hanno altezze reciprocamente proporzionali alle loro gravità specifiche (26); di modo che, se la colonna di mercurio ha 28 pollici di altezza, quella dell'acqua deve averne 32 piedi. Ora la pressione dell'atmosfera contrabbilancia la prima delle due colonne, come abbiamo veduto; dunque ella contrabbilancerà anche la seconda. Così nel vuoto la pressione dell'atmosfera deve sostenere una colonna d'acqua dell'altezza di 32 piedi in circa.

COROLLARIO III.

41. Sia *ABHO* (Fig. 20.) un sifone ricurvato, e composto di due bracci d'ineguale lunghezza; immergasi il più corto *BA* nel liquido *CN* d'una botte *CD*; e levisi l'aria contenuta nell'interiore del sifone, succhiandola dalla estremità *O*: allora il liquido della botte ascenderà pel sifone ed uscirà dalla estremità *O*, purchè questa estremità sia più bassa della superficie *MN* del liquido della botte.

Fig. 20.

Questo fenomeno è lo stesso, che quello del Barometro. Di fatti immaginiamoci, che l'estremità *O* del sifone sia immersa in un vaso *EF*, che contenga del liquido. Si vede, che ciascuna delle parti *AB*, *OH* del sifone può riguar-

guardarſi come un tubo particolare, ſimile a quello di TORRICELLI. Così rappreſentando la preſſione dell' atmosfera con *KX*, il peſo della colonna fluida *AB* con *KV*, quello della colonna *HO* con *KZ*, egli è chiaro, che *VX* esprime la forza che ſolleva il fluido nel tubo *AB*, e che *ZX* esprime la forza, che tende a ſollevare il fluido nel tubo *OH*. Ora, ſiccome queſte due ultime forze ſono contrarie, la più debole viene diſtrutta, e *ZV* è la forza reſtante, che fa ſcorrere il liquido pel verso *ABHO*.

Si vede perciò 1.° che ſe *KV*=*KZ* non vi può eſſere corrente di fluido. 2.° Che ſe il peso del più corto braccio è maggiore di quello dell' atmosfera, la corrente non vi potrà parimente eſſere, poichè allora la preſſione dell' atmosfera non ha forza ſufficiente per ſollevare il liquido ſino in *B*. Così, p. e., ſe il liquido è acqua, biſogna che l' altezza del più corto braccio *AB* ſia minore di 32 piedi; per il mercurio, *AB* deve eſſere minore di 28 pollici; ec.

TEOREMA II.

42. *L' aria è un fluido elaſtico*.

Prendaſi una veſcica, e ſi gonfi introducendovi dell' aria: ſi avrà un pallone, che ſi comprimerà premendolo, e ſi dilaterà allorchè ſi ceſſerà di premerlo. Dunque ec.

TEO-

TEOREMA III.

43 *La forza elastica dell' aria compressa è uguale a quella, che produce la compressione.*

La fontana di ERONE ne dà la prova. Questa macchina (Fig. 21.), che si fa ordinariamente di latta, è composta d'una cassa *ABCD*, chiusa da tutte le parti, piena d'acqua fino in *EF* un poco al di sotto di *AB*; d'un' altra cassa *GHKI*, pure chiusa da tutte le parti, eguale alla prima, e piena d'aria; d'un tubo *OT* esattamente saldato con lamine *AB*, *DC*, *GH*, il quale comunica al di fuori coll' estremità *O*, e alla cassa inferiore per l'estremità *T*, che è molto vicina al fondo *IK*; d'un tubo *XY*, saldato alle due casse, e la di cui estremità superiore *X* è vicina al fondo *AB*; d'un tubo *QP*, la di cui estremità inferiore *P* è vicina al fondo *DC*, e la superiore *Q*, saldata al fondo *AB*, è fornita d'un picciol canello. Ciò posto chiudete il canello *Q* col dito, e versate un poco d'acqua dalla estremità *O* del tubo *OT*; essa discenderà fino in *IK*, e salirà, per esempio, ad *VS*. Allora non vi sarà più alcuna comunicazione tra l'aria esterna, e quella, che rimane nelle due casse. Continuate a vuotare dell' acqua; l'aria contenuta negli spazj *GHSV*, *ABFE*, *XY* si condenserà a poco a poco, fino a che la sua forza elastica sia in equilibrio colla pressione dell' acqua vuotata da *OT*. Se la super-

Fig. 21.

ficie dell'acqua nella caſſa *GHKI* è *MN*, l'aria, di cui ſi è parlato, premerà perpendicolarmente ciaſcuna parte della ſuperficie, che la circonda, con una forza eguale al peso d'una colonna d'acqua, che avrà per base la parte compreſſa, ed *OL* per altezza. Così la ſuperficie *EF* dell' acqua rinchiuſa nella caſſa ſuperiore è spinta da alto in baſſo dalla ſteſſa aria, e l'acqua tende ad innalzarſi pel tubo *PQ*; di modo, che ſe ſi leva il dito dal cannello, uſcirà un getto d'acqua, che ſi ſolleverà all'altezza *RZ* uguale ad *OL*. Si vede dunque, che l'elaſticità dell'aria produce il medeſimo getto, che produrrebbe il peſo dell'acqua, da cui è ſtata compreſſa.

Si può notare che facendo rientrare per *O* l'acqua, che caſca dal getto, queſta paſſa nella caſſa inferiore, e per conseguenza il getto durerà fino a che tutta l'acqua compreſſa dal punto *P* ſino in *EF* ſia uſcita ſalendo.

TEOREMA IV.

44. *L'aria ſi comprime da ſe ſteſſa pel proprio peſo.*

Imperciocchè eſſendo l'aria un fluido pesante, se ſi concepisce l'atmosfera diviſa in una infinità di ſezioni, o piuttoſto di ſtrati perpendicolari alla direzione della gravità, egli è evidente, che gli ſtrati inferiori saranno caricati dal peso dei superiori; d'onde riſulterà neceſſa-

ria-

rìamente una compreſſione, che ſarà più grande (tutto il reſto eſſendo altronde eguale) a misura, che lo ſtrato compreſſo sarà più al baſſo nell' atmosfera.

Dico *il tutto altronde uguale*, poichè vi sono altre cause, come il freddo, ed il caldo, che concorrono a comprimere, e a dilatare l'aria.

La denſità di queſto fluido è eſtremamente variabile. Ella è incirca otto, o nove cento volte minore di quella dell'acqua ordinaria.

Il rapporto medio di queſta denſità nei noſtri climi può esprimerſi ſenſibilmente colla frazione $\frac{1}{850}$.

COROLLARIO.

45. Da ciò, e dall' articolo 43 ne segue, che se l'aria, dopo eſſerſi compreſſa pel proprio peſo, viene ad agire colla ſola ſua elaſticità, eſſa produrrà il medeſimo effetto, che produceva col ſuo peſo. Ciò è confermato dall' eſperienza, cha segue.

Prendete una boccia di vetro *ABCD* (Fig. 22), di figura cilindrica; votatevi entro del mercurio *AEFD*, fatevi entrare un piccolo cannello *K* di vetro, dell' altezza di 29, o 30 pollici, aperto alle due eſtremità, di cui l'inferiore peschi per alcune linee nel mercurio; ſigillate queſto tubo eſattamente al collo della boccia, in modo, che l'aria contenuta nello spazio *EBCF* non abbia alcuna comunicazione coll' a-

Fig. 22.

ria

ria esteriore; di poi mettete questa boccia, ed il suo tubo sotto il recipiente *LIHM* della macchina pneumatica; assorbite al più possibile l'aria contenuta in questo recipiente: allora il mercurio s'abbasserà ad *NO*, e s'innalzerà nel tubo al di sopra di *NO*, quasi alla stessa altezza, che si sostiene nel Barometro, nel luogo, dove si fa l'esperienza. La ragione è evidente; poichè prima d'incominciare a vuotar la macchina pneumatica, l'aria contenuta nello spazio *EBCF* è nel medesimo stato, che l'aria esteriore; quando poi si vuota il recipiente, l'aria medesima *EBCF* spiega la sua molla, e sforza in conseguenza il mercurio ad abbassarsi ad *NO*, e ad ascendere nel tubo vuoto: questa ascesa è presso a poco uguale a quella, che è prodotta nel Barometro dal peso dell'aria. Dico presso a poco, poichè non è mai possibile di vuotare perfettamente d'aria il recipiente della macchina pneumatica.

TEOREMA V.

46. *Se si comprime una medesima massa, o quantità d'aria, e si riduce ad occupare differenti spazj o volumi, questi volumi saranno tra se in ragione inversa delle forze comprimenti.*

Questa proposizione si prova coll'esperienza seguente, che è abbastanza conosciuta dai Fisici, e che M. MARIOTTE fu il primo ad eseguire. Sia *ABC* (Fig. 23,) un tubo di vetro ri-

Fig. 23.

ripiegato, chiuso ermeticamente alla estremità *C*, ed aperto alla estremità *A*. I due bracci *DA*, *EC* sono verticali; ma il braccio *DE* di congiunzione è orizzontale. Si dà ordinariamente a questo tubo tre o quattro linee di diametro interiore. Il piccolo braccio *EC* deve essere perfettamente cilindrico, per poter paragonare esattamente tra se i differenti volumi della massa d' aria, che vi si condensa. Noi supponiamo ch' esso abbia 12 pollici d' altezza; l' altro *DA* è molto più alto. Versate leggiermente nel tubo un poco di mercurio per empire il braccio orizzontale, e fate in modo, che le due superficie *DV*, *IE* di questo fluido, nei due bracci verticali, sieno a livello, affine che l' aria rinchiusa nello spazio *EC* sia nel medesimo stato, che l' aria esteriore: poichè egli è evidente, che se la molla dell' aria interiore *EC* fosse più o meno tesa di quella dell' aria esteriore, le superficie *IE*, *DV* sarebbero inegualmente compresse, e per conseguenza non potrebbero stare a livello. Continuate poi a vuotare del mercurio nel braccio *DA*; e vedrete, che a misura ch' esso s' innalzerà in *H*, la superficie *EI* s' innalzerà in *F*. Supponendo, che la pressione dell' atmosfera sia equivalente al peso d' una colonna di mercurio di 28 pollici di altezza, troverete che se menata l' orizzontale *FG*, l' altezza *GH* è = 14 pollici, l' altezza *FC* dello spazio occupato dall'

aria

aria sarà $=$ 8 pollici; se *GH* è $=$ 28 pollici, *FC* sarà $=$ 6 pollici; ec. Ora ne viene di quì che i differenti volumi dell'aria rinchiusa da prima in *EC* seguono la ragione inversa de' pesi comprimenti; poichè al primo istante dove quest' aria non sopporta che la pressione dell' atmosfera, può riguardarsi come caricata del peso d' una colonna di mercurio alta 28 pollici; allorchè si mette in seguito nel braccio *DA* del mercurio all' altezza di 14 pollici al di sopra della linea di livello *FG*, la pressione, che soffre la nostra massa d' aria, è uguale al peso d'una colonna di mercurio, che ha 28 pollici $+$ 14 pollici, cioè 42 pollici di altezza; allorchè l' altezza del mercurio nel braccio *DA* al di sopra di *FG* $=$ 28 pollici, la pressione della stessa massa d' aria è uguale al peso d'una colonna di mercurio, che ha 28 pollici $+$ 14 pollici $+$ 14 pollici, ossia in tutto 56 pollici di altezza; ec. Dal che si vede, che i pesi comprimenti venendo rappresentati dai numeri 28, 42, 56, i volumi della massa d' aria sono espressi dai numeri 12, 8, 6. Ora si hanno queste differenti proporzioni, 12 : 8 : : 42 : 28; 12 : 6 : : 56 : 28; 8 : 6 : : 56 : 42. Dunque i volumi seguono la ragione inversa dei pesi comprimenti.

Si faranno de' ragionamenti analoghi per altre altezze di mercurio, le quali seguissero tutt' altri rapporti ne' due bracci del tubo; e que-

questi ragionamenti, fondati sull' esperienza, guideranno alla stessa conclusione finale.

Tutte queste esperienze devono esser fatte in modo, che l'aria rinchiusa in *FC* abbia la stessa temperatura dell'aria esteriore, e che per conseguenza il suo volume non varj se non a ragione dei pesi comprimenti. Senza questa precauzione, il caldo ed il freddo, non agendo allo stesso modo sopra le due arie, cangerebbero i risultati, e sarebbe difficile di separare, con un metodo sicuro, e non ipotetico, i loro effetti da quelli dei pesi comprimenti.

COROLLARIO I.

47. Poichè la forza elastica dell' aria è uguale alla forza, che la comprime (43), ne segue, che le differenti forze elastiche d' una stessa massa d' aria, dalla quale si fanno occupare differenti volumi, sono in ragione inversa di questi volumi.

COROLLARIO II.

48. Sotto una stessa massa, le densità sono in ragione inversa dei volumi. Dunque le densità d' una stessa massa d' aria compressa da differenti pesi sono direttamente proporzionali a questi pesi, o (43) alle forze elastiche, che essa ha in tali differenti stati.

COROLLARIO III.

49. Le denſità de' differenti punti d' una colonna verticale dell' atmosfera formano, a temperatura eguale, una progreſſione geometrica decreſcente all' infinito, ſuppoſto che queſta ſerie incominci ad un medeſimo livello, per eſ. a quello del mare, e continui ſecondo l' altezza dell'atmosfera; imperciocchè ſe ſi concepiſce che la colonna, di cui ſi tratta, ſia compoſta d' una infinità di ſtrati orizzontali della ſteſſa maſſa, la denſità di ciaſcuno di queſti ſtrati è proporzionale al peso, di cui eſſo è caricato, cioè alla ſomma del ſuo proprio peſo unito alla ſomma dei peſi degli ſtrati ſuperiori, oſſia alla somma della denſità dovuta al ſuo proprio peſo, unita alla somma delle denſità degli ſtrati superiori. Ora ſe ſi ha una progreſſione geometrica $\div\!\!\div a : b : c : d : e : f :$ ec. decreſcente all' infinito, e ſi chiama s la somma intiera de' suoi termini, s' la somma da b incluſivamente, s'' la ſomma da c incluſivamente, ec., ſi avranno queſte proporzioni, $a:b::s:s-a$; $b:c::s':s'-b$; $c:d::s'':s''-c$; ec. Così le denſità dei noſtri ſtrati seguono tra ſe la medeſima legge che i termini d' una progreſſione geometrica decrescente all' infinito, e formano per conseguenza una tale progreſſione.

SCOLIO.

50. Tutte le esperienze, che ſi sono fatte, ſulla

ſulla compreſſibilità dell' aria, provano, che una ſteſſa maſſa di queſto fluido ſi comprime ſecondo la proporzione de' peſi, di cui eſſa è caricata; ma ſi deve oſſervare, che queſte esperienze hanno per oggetto delle condensazioni *medie*; imperciocchè ſembra, che ne' caſi eſtremi la regola non poſſa eſſere troppo esatta. In fatti immaginiamoci per un momento, che la compreſſione aumenti all' infinito: bisognerebbe, che la condenſazione aumentaſſe del pari, e che in fine l' aria non occupaſſe più ſe non uno spazio infinitamente piccolo. Ora qualunque figura ſi attribuiſca alle molecole aeree; egli è chiaro, che quando la loro molla è ſtata compreſſa ſino a che tutte le ſue parti vengano a toccarſi, l' impenetrabilità mutua di queſte parti non laſcia più luogo alla compreſſione. Aggiugnete, che l' aria può eſſere miſta di parti dure, prive d' elaſticità, o dotate d' una elaſticità imperfettiſſima. Se al contrario ſi suppone, che la compreſſione diminuiſca all' infinito, non ſi potrà medeſimamente ſupporre, che l' aria ſi dilati all' infinito; imperciocchè l' elaſticità perfetta, o imperfetta delle molecole aeree non può avere se non una eſtenſione determinata, ed è impoſſibile di concepire, che una maſſa finita venga ad occupare uno spazio infinito. Egli non è dunque rigoroſamente vero, che le condenſazioni dell' aria ſeguano generalmente il rapporto de' peſi comprimenti. Ma ſiccome le for-

ze

ze comprimenti, che noi possiamo impiegare nelle nostre esperienze, non passano mai certi limiti, la proposizione dell' articolo 46. può allora riguardarsi come vera, senza restrizione alcuna.

DELLE TROMBE.

51. Le trombe in generale sono tubi destinati a sollevare l'acqua ad una certa altezza per mezzo d' un principio motore qualunque, che mette in giuoco il peso, o l'elasticità dell' aria, e che fa servire questo peso, o questa elasticità di veicolo alla sua azione sopra l' acqua, che si vuole innalzare.

Vi sono tre specie principali di trombe: la tromba *aspirante*, la tromba *premente*, e la tromba, che insieme è *aspirante* e *premente*.

Tromba aspirante.

Fig. 24. 52. La tromba aspirante (Fig. 24.) è composta di due tubi verticali *AMNC*, *ABDC*, che s' uniscono insieme in *AC*. Il primo, che pesca nell' acqua *MN*, si chiama *tubo d' aspirazione*, il secondo dicesi *corpo della tromba*. In *AC* v' è un diaframma traforato in *e*, coperto d'una valvula *E*, che s' apre da basso in alto. Nel corpo della tromba scende e discende alternativamente uno stantuffo, di cui l' asta *Z* vien mossa da una leva, o in qualunque si voglia altro modo. Il capo di questo stantuffo è sforato,

rato, nella direzione del suo asse, d'un buco *f*, coperto da una valvula *F*, che s'apre da basso in alto. Esso percorre, nel suo giuoco, un certo spazio, di cui suppongo che *GK* ne sia l'altezza, cioè che essendo lo stantuffo abbassato, la sua base inferiore sia nel piano orizzontale *GH*, e che essendo alzato, questa medesima base sia nel piano orizzontale *KI*. Il limite inferiore *GH* del viaggio dello stantuffo dev'essere più vicino, che sia possibile, alla valvula *E*.

Per ispiegare l'effetto di questa macchina, suppongo che al primo istante, la base dello stantuffo sia in *GH*. Allora l'aria compresa nello spazio *MC*, l'aria compresa nello spazio *AH*, e l'aria naturale, o l'aria dell'atmosfera, nel luogo dove è la macchina hanno la medesima densità, la medesima forza elastica; supposto che le due valvule *E* ed *F*, per la loro mobilità, lascino libera la comunicazione delle tre arie, di cui si parla; dopo di che queste due valvule stesse si chiudono pel proprio peso. Innalzate ora lo stantuffo da *GH* in *KI*: la valvula *F* resta serrata pel proprio peso, e per la pressione dell'aria superiore; l'aria *MC*, e l'aria *AH* si dilatano; la prima, per la sua forza d'espansione, fa aprire la valvula *E*, e queste due arie si mischiano insieme e vengono a formare un'aria sola, la di cui forza elastica, diminuendo nella stessa ragione,

 che

che aumenta lo spazio, nel quale l'aria ſi ſpande (47), non può più fare equilibrio alla preſſione dell'aria eſteriore ſopra la ſuperficie *MN* del ſerbatojo; per conſeguenza queſt' ultima forza deve far aſcendere di una certa quantità *Mx* l'acqua nel tubo d'aſpirazione, intanto che lo ſtantuffo s' innalza da *GH* in *KI*. L'altezza *Mx* è tale, che il peſo della colonna d'acqua *Mu*, aggiunto alla forza elaſtica dell'aria indebolita, ſparſa nello ſpazio *xI*, ed al peſo della valvula *E*, fa equilibrio colla preſſione dell'aria eſteriore. Quando lo ſtantuffo è giunto in *KI*, la valvula *E* ricade pel proprio peso, e rende iſolata l'aria compreſa nello ſpazio *xC*; e la colonna d'acqua *Mu* rimane ſempre ſoſpeſa alla medeſima altezza *Mx*. Abbaſſate lo ſtantuffo da *KI* in *GH*: l'aria contenuta nello ſpazio *AI* s'appoggia colla ſua molla, che agiſce per ogni verſo, contro la valvula *E*, che tiene chiuſa, e contro la valvula *F*, cui sforza ad aprirſi; l'aria pure contenuta da *AC* ſino alla baſe inferiore dello ſtantuffo paſſa pel buco *f*, e ſi meschia coll'aria eſteriore. Queſto effetto dura ſino a che lo ſtantuffo ſia arrivato in *GH*; dopo di che la valvula *F* ſi chiude. Innalzate lo ſtantuffo da *GH* in *KI*: la valvula *F* reſterà chiuſa, la valvula *E* s'aprirà, e l'acqua aſcenderà ancora per una certa quantità *xy* nel tubo d'aſpirazione. E così in ſeguito. Dal che ſi vede, che

che dopo un certo numero di colpi di ſtantuffo, l'acqua arriverà nel corpo della tromba, ed uſcirà o dalla eſtremità ſuperiore di queſto tubo, o da un tubo *O* fiſſo nel corpo della tromba. Queſto effluſſo dell' acqua continuerà ſino a tanto che ſi continuerà a far giuocare lo ſtantuffo.

Si vede che il getto dell'acqua non è continuo, e che ha luogo ſolamente, o che può giudicarſi aver luogo nel tempo, che lo ſtantuffo aſcende.

SCOLIO.

53. Biſogna oſſervare, che non curando anche il peſo della valvula *E*, e ſupponendo che ſi aveſſe potuto parimente votare il tubo d'aſpirazione, come la parte ſuperiore del tubo del Barometro, l'altezza *GM* deve eſſere minore dell'altezza della colonna d'acqua, che ſarebbe equilibrio alla colonna di mercurio del Barometro, nel luogo dove la tromba giuoca: e queſto affine che l'acqua poſſa arrivare ſopra *GH*, ed innalzarſi nel corpo della tromba. Così per eſ. se l'altezza della colonna di mercurio è di 28 pollici, l'altezza *GM* deve eſſere minore di 32 piedi. Ma adempiuta una volta queſta condizione, l'altezza *LV* della ſuperficie *BD* dell' acqua nel corpo della tromba, al di ſopra della ſuperficie *MN* dell' acqua del ſerbatojo, può eſſere maggiore dell' altezza della colonna d'acqua equivalente alla preſſione dell' atmosfera.

Sopra di che però si deve osservare, che l'asta *Z* dello stantuffo, movendosi nel corpo della tromba *ABDC*, l'altezza *AB* di questo tubo non deve essere troppo grande, altrimenti l'asta *Z* sarebbe in pericolo di piegarsi.

54. L'efflusso dell'acqua pel tubo di uscita *O*, ossia il prodotto della tromba è facile a determinarsi: Imperciocchè si vede, che nel tempo, in cui lo stantuffo s'innalza da *GH* in *KI*, esce una quantità d'acqua equivalente ad un cilindro d'acqua *GI*.

55. Avendo sempre luogo questo medesimo efflusso, *lo stantuffo sostiene continuamente nell'innalzarsi uno sforzo uguale al peso d'una colonna d'acqua, che avrebbe per base il circolo della testa dello stantuffo, e per altezza quella della superficie dell'acqua nel corpo della tromba al di sopra della superficie dell'acqua nel serbatojo*; cioè chiamando F lo sforzo sostenuto dallo stantuffo, a^2 l'aja del cerchio rappresentato da *GH*, h l'altezza *LV* della superficie *BD* dell'acqua nel corpo della tromba al di sopra della superficie *MN* del serbatojo: si ha $F = a^2 \times h$. Poichè sia *VS* l'altezza della colonna d'acqua equivalente alla pressione dell'atmosfera, e supponiamo che lo stantuffo, nel salire sia giunto nella posizione qualunque *gh*, alla quale corrisponde l'altezza *rV*: egli è chiaro, 1.° che lo stantuffo è spinto da alto al basso per la pressione dell'atmosfera, che produce uno sforzo $= a^2 \times VS$,

e

e per la pressione della colonna d'acqua gD, che produce uno sfoszo $= a^2 \times rL$. Di modo che, nel totale, lo stantuffo è spinto da alto in basso, con una forza $= a^2 \times VS + a^2 \times rL$. 2.° Lo stantuffo è spinto da basso in alto per la pressione dell'atmosfera sopra la superficie MN del serbatojo, la quale produce uno sforzo $= a^2 \times VS$; questo sforzo è distrutto in parte dal peso della colonna d'acqua, che ha per base il cerchio gh ovvero GH, e per altezza rV. Di modo che, nel totale, lo stantuffo è spinto da basso in alto con una forza $= a^2 \times VS - a^2 \times rV$. Per conseguenza si ha $F = (a^2 \times VS + a^2 \times rL) - (a^2 \times VS - a^2 \times rV)$; ciò che riducesi ad $F = a^2 \times LV = a^2 \times h$.

A questa forza bisogna aggiugnere il peso dello stantuffo nell'acqua, e l'attrito, che lo stantuffo soffre lungo le pareti del corpo della tromba, per avere la resistenza totale, che lo stantuffo dee superare per innalzarsi.

Lo stantuffo discende nell'acqua pel proprio peso; nè v'è allora nessun'altra resistenza a superare, che l'attrito, ed un piccolo urto contro l'acqua.

Trombe prementi.

56. Si vede nella Fig. 25. una tromba premente. Il corpo della tromba $ABDC$ pesca nell'acqua d'un serbatojo, la di cui superficie è MN; lo stantuffo entra dal basso, e solleva o

Fig. 25.

preme l' acqua; la ſua aſta *Z* è ſolidamente fiſſata ad un telajo mobile *TYX*, che ſi fa aſcendere e diſcendere alternativamente pel mezzo d' una leva, o in qualunque altro modo; il ſuo capo è forato d' un buco coperto con una valvula *F*, che s' apre da baſſo in alto. In *AC*, un poco al di ſotto della ſuperficie *MN* dell' acqua del ſerbatojo, v' è un diaframma forato d' un buco coperto da una valvula *E*, che s' apre da baſſo in alto. Il corpo di tromba s' uniſce in *AC* col tubo aſcendente *ACV*, che porta l' acqua al luogo dove ſi vuole innalzarla.

Per ſpiegare il giuoco di queſta tromba, ſupponiamo, che al primo iſtante il capo dello ſtantuffo ſia in *KI*, che è il limite il più baſſo del ſuo cammino. Allora il corpo di tromba è pieno d' acqua e queſt' acqua è a livello con quella del ſerbatojo, permettendo le due valvule *E* ed *F*, per la loro mobilità, la comunicazione delle acque; queſte due valvule poi ſi chiudono per le gravità, che reſtano loro anche nel fluido. Innalzate lo ſtantuffo da *KI* in *GH*, che è il limite ſuperiore del ſuo cammino: la valvula inferiore *F* ſta chiuſa, la ſuperiore *E* s' apre, e l' acqua contenuta nello ſpazio *KH* s' innalza ſopra *GH*, e paſſa nel tubo aſcendente; inoltre, intanto che lo ſtantuffo aſcende, è ſeguito dall' acqua che entra dal ſerbatojo nel corpo della tromba. Abbaſſa-

te lo ſtantuffo da *GH* in *KI*: la valvula *F* ſi apre, e la valvula *E* ſi chiude, ed impediſce all'acqua, che ſi trova al di ſopra, di diſcendere; innalzando di nuovo lo ſtantuffo, la valvula *F* ſi chiude, e la valvula *E* ſi apre, e l'acqua continua ad aſcendere nel tubo aſcendente *ACV*; e così di ſeguito. Si vede intanto, che pel giuoco reiterato dello ſtantuffo l'acqua s'innalza vieppiù nel tubo *ACV*, e finiſce coll'arrivare all'altezza deſiderata.

L'innalzamento dell'acqua è intermittente, come nella tromba della prima ſpecie.

SCOLIO.

57. L'altezza del tubo aſcendente non è qui limitata, come per la tromba aſpirante, perchè eſſendo l'aſta *Z* dello ſtantuffo fuori della tromba, baſta ſoltanto darle la lunghezza neceſſaria per applicarvi l'agente, che deve movere la macchina.

58. Egli è chiaro che queſta tromba dà una quantità d'acqua equivalente al cilindro *KH*, intanto che lo ſtantuffo aſcende da *KI* in *GH*.

59. Ragionando come per la tromba aſpirante, ſi vedrà che lo ſtantuffo nell'aſcendere ſoſtiene qui per rapporto all'acqua uno ſforzo eguale al peſo d'una colonna, che avrebbe per baſe il circolo della teſta dello ſtantuffo, e per altezza la verticale compreſa dalla ſuperficie dell'

acqua del serbatojo ſino alla ſuperficie dell' acqua nel tubo aſcendente. Al che biſogna aggiugnere il peso del telajo *TYX*, quello dello ſtantuffo nell' acqua, e l' attrito contro le pareti del corpo della tromba.

Lo ſtantuffo diſcende per la gravità; ma è ritardato per l' attrito, e per un lieve urto contro l' acqua.

Tromba aſpirante e premente.

60. La tromba aspirante e premente, rappreſentata dalla figura 26, è compoſta d' un tubo d' aſpirazione *AMNC*, che peſca nell' acqua *MN* d' un ſerbatojo; d' un corpo di tromba *ABDC*, nel quale lo ſtantuffo *P* ſi muove come nelle due trombe antecedenti; e d' un tubo aſcendente *CQV*. In *AC*, e *QR* vi sono due valvule, o due cappelletti a cerniera, che s' aprono da baſſo in alto. Lo ſtantuffo giuoca nello spazio *GK*; la ſua teſta è maſſiccia, e non è traforata come ne' due caſi precedenti. Si vede, che nel farlo aſcendere e discendere alternativamente, l' acqua s' alza immantinente nel tubo d' aſpirazione, e nel corpo della tromba, preciſamente nella ſteſſa maniera, che nella tromba aſpirante ordinaria. I movimenti alternativi delle due valvule *E* ed *F* ſono aſſolutamente gli ſteſſi ne' due caſi. L' acqua arriva, dopo alcuni colpi di ſtantuffo, nello ſpazio vuoto, che queſto medeſimo ſtantuffo, nell' innal-

Fig. 26.

nalzarsi, lascia nel corpo di tromba. In seguito lo stantuffo discendendo la preme, e la fa passare nel tubo ascendente *CQV*. Alzando lo stantuffo, esso aspira nuovamente altr' acqua, cui preme nel discendere, e così di seguito.

Egli è chiaro, che qui si deve applicare l' osservazione dell' articolo 53.

61. Il prodotto della tromba, o la quantità d' acqua, ch' ella getta dalla estremità superiore del tubo ascendente, si valuta sempre dal cilindro d' acqua *GI*, che uscirebbe nel tempo, che lo stantuffo impiega ad innalzarsi da *GH* in *KI*.

62. Per trovare il valore della forza motrice, supponiamo che la testa dello stantuffo sia nella posizione *gh*, alla quale corrisponde l' altezza verticale *gM* al di sopra dell' acqua del serbatojo. Sia *MS* l' altezza della colonna d' acqua equivalente alla pressione dell' atmosfera, ed *ML* l' altezza intiera, alla quale l' acqua è innalzata. Chiamiamo a^2 l' aja del cerchio *gh*; *h* l' altezza *gM*; *H* l' altezza *gL*; *P* il peso dello stantuffo, e del suo attrezzo; *X* la forza che spinge lo stantuffo da basso in alto, ossia che spinge durante l' aspirazione, facendo astrazione dallo sfregamento; *Y* la forza, che spinge lo stantuffo da alto in basso, ossia durante la pressione, sempre astrazione fatta dall' attrito. Ciò posto, 1.° arrivato lo stantuffo in *gh*, supposto che ascenda, o aspiri l' acqua, e per con-

conſeguenza eſſendo chiuſa la valvula F, egli è chiaro che $X = P + a^2 \times SM - (a^2 \times SM - a^2 \times gM) = P + a^2 \times gM = P + a^2 h$. 2.° Giunto lo ſtantuffo in gh, ſuppoſto, che diſcenda, o prema l'acqua, e per conſeguenza eſſendo chiuſa la valvula E, ſi ha $Y = a^2 \times SM + a^2 \times gL - a^2 \times SM - P = a^2 H - P$.

La ſomma delle due forze X ed Y è dunque $a^2 h + a^2 H$, oſſia $a^2 \times ML$. Così lo sforzo totale, che l'agente è coſtretto di fare per movere la macchina, è uguale al peſo d'una colonna d'acqua, che avrebbe per baſe la teſta dello ſtantuffo, e per altezza quella del punto ove l'acqua è innalzata ſopra la ſuperficie del ſerbatojo. Ma abbiamo il vantaggio, che queſto sforzo ſi divide in due parti, l'una, che riſponde alla aſpirazione, l'altra alla preſſione, laddove nelle due prime ſpecie di trombe lo sforzo totale s'eſercita nel mentre che lo ſtantuffo s'innalza e preme l'acqua.

63. Faremo a queſto propoſito una oſſervazione, che è importante. Siccome in tutte le macchine egli è eſſenziale di ſtabilire, quanto più è poſſibile, l'uniformità del moto, ſi deve aver cura di rendere tra di ſe uguali le due forze X ed Y. Queſta ugualtà darà $P + a^2 h = a^2 H - P$; da cui ſi trae $P = \frac{a^2 (H - h)}{2}$.

Così 1.° delle due parti gL, gM dell'altezza totale ML, la prima deve eſſere maggiore della

la seconda; imperciocchè se si avesse $H = h$, o $H < h$, il peso P sarebbe nullo, o negativo; e nè l'uno, nè l'altro possono aver luogo. 2.° Se tutto altronde restando il medesimo, la superficie MN dell'acqua del serbatojo viene ad abbassarsi, o ad innalzarsi (ciò che succede quando il tubo d'aspirazione pesca in un fiume), allora in conseguenza bisogna diminuire o aumentare P; ciò che può sempre ottenersi, almeno fino ad un certo segno, caricando o scaricando la testa dello stantuffo di alcuni pesi amovibili.

La mancanza dell'equilibrio tra le forze X ed Y è assai frequente. Vi si è inciampato nelle pretese correzioni, che si fecero già da qualche anno ad uno degli attrezzi delle trombe della *Samaritana*. Nè sembra essersi conosciuta la vera cagione degli inconvenienti, che sono succeduti per questi cangiamenti.

64. La tromba aspirante, e premente può avere un'altra forma, o un'altra disposizione diversa da quella della Figura 26. In questa Figura lo stantuffo aspira nell'ascendere, e preme nel discendere. Ma si può fare in modo (Fig. 27.), che lo stantuffo aspiri nel discendere, e prema nell'ascendere. Fig. 27.

Chiamando a^2 l'aja del cerchio gh; h l'altezza rM dello stantuffo arrivato in gh, al di sopra dell'acqua del serbatojo; H l'altezza rL da gh fino al punto dove l'acqua è innalzata;

P

P il peso dello ſtantuffo e del ſuo attrezzo; X la forza, che ſpinge lo ſtantuffo da alto in baſſo, oſſia che ſpinge durante l'aſpirazione, Y la forza, che ſpinge lo ſtantuffo da baſſo in alto, ovvero durante la preſſione: ſi troverà (preſcindendo dall' attrito) $X = a^2 h - P$, $Y = a^2 H + P$. Dunque, ſe ſi fa $X = Y$, ſi avrà $a^2 h - P = a^2 H + P$; ciò che dà $P = \frac{a^2 (h - H)}{2}$. Così nel caſo preſente biſogna, che, delle due parti Mr, rL dell' altezza totale ML, la ſeconda ſia minore della prima.

Data l' altezza ML, alla quale ſi vuole innalzare l' acqua, ſi determinerà, ſecondo il rapporto delle diſtanze verticali di gh dalla ſuperficie dell' acqua del ſerbatojo, e dalla ſuperficie dell'acqua di ſcarico, quale ſia quella delle due trombe (Fig. 26 e 27), che più importi d' impiegare.

Nella pratica ſi prenderà gh al mezzo di GI.

Non ci abbiſogna d'aggiugnere, che ne' noſtri calcoli delle forze conſideriamo ſemplicemente lo ſtato d' equilibrio.

SCOLIO.

65. Nelle tre ſpecie di trombe propoſte, il getto d'acqua che ſi ha allo ſcaricatojo non è ſempre uguale, ma è ſoggetto ad intermittenza; perchè s' impiega quaſi la metà del tempo nell'abbaſſare o innalzare lo ſtantuffo per prendere

dere della nuova acqua, e durante questa parte di tempo, l'acqua non esce dallo scaricatojo o almeno ne esce pochissima. Già da più anni in quà si guarnisce ordinariamente il tubo ascendente, come si vede nella tromba premente della Fig. 28, di una specie di tamburo vuoto *KR*, chiuso al di fuori da tutte le parti, ma che comunica col tubo interrotto in *G*, *H*. Questo tamburo, che chiamasi *serbatojo d' aria*, contiene prima dell' aria, che ha la stessa densità, che quella al di fuori. Quando in seguito s' innalza lo stantuffo, l'acqua, che sale pel braccio *CBDQ*, si spande in parte pel serbatojo *KR*, e condensa l' aria, che vi è contenuta, le toglie la comunicazione coll' aria esteriore, e la costringe ad occupare soltanto lo spazio *kryx*. Allorchè poi s' abbassa lo stantuffo, l' aria così condensata si dilata per la forza della sua elasticità, sforza l' acqua a discendere da *kr* in *KR*, e per conseguenza ad innalzarsi nel braccio *GHQD*. Col continuare il medesimo giuoco, si vede, che di continuo ascende acqua in questo braccio, e che il getto al luogo dello scaricatojo deve essere continuo, almeno sensibilmente.

Fig. 28.

Vi sono alcuni fabbricatori di trombe, i quali pensano, che il serbatojo d'aria aumenti della metà l' effetto della macchina; imperciocchè, dicono essi, siccome allora il getto è continuo, la tromba deve dare il doppio d'acqua, ch'

ch' essa non ne darebbe se non vi fosse il serbatojo d'aria, e il getto fosse intermittente. Ma non fanno attenzione, che il prodotto della tromba è sempre la quantità d'acqua, che lo stantuffo innalza nell' ascendere; e che la potenza motrice (essendo sempre la medesima la velocità dello stantuffo) impiega sempre il medesimo sforzo, sia che essa faccia ascendere direttamente quest' acqua fino allo scaricatojo, o che una parte di quest' acqua si spanda nel serbatojo d'aria, d'onde ella è poi innalzata per la molla dell' aria. Imperciocchè nel secondo caso bisogna tendere la molla dell'aria contenuta nel serbatojo *KR*; e questo sforzo unito a quello, che fa ascendere attualmente una parte dell'acqua nel braccio *GHQD* consuma la forza intiera; ciò che torna al primo caso. Se dunque il getto è continuo, quando vi è un serbatojo d'aria, l'acqua esce con una velocità due volte minore, che non uscirebbe, se il serbatojo non vi fosse ed il getto fosse intermittente; ed il prodotto della tromba è sempre lo stesso. Il serbatojo d'aria adunque ha semplicemente il vantaggio di procurare più d'uniformità al moto della macchina, e di rendere il getto d'acqua continuo; il che è utilissimo nelle trombe per gli incendj, poichè un getto d'acqua continuo estingue più facilmente il fuoco, che non fa un getto a balzi, quantunque di maggior velocità.

CA-

CAPO IV.

Dell' equilibrio de' corpi solidi con i fluidi.

66. Un corpo solido immerso in parte, o totalmente in un fluido, è sollevato da questo fluido con una certa forza, di cui si tratta di determinare la quantità e la direzione, per conoscere la forza contraria, che bisogna opporle ad effetto di stabilire l' equilibrio.

LEMMA I.

67. *Se* (Fig. 29.) *sui punti di mezzo dei lati d' un poligono qualunque inflessibile* ABCDE *sono applicate perpendicolarmente le potenze* P, Q, R, S, T, *proporzionali ciascuna a ciascuno di questi lati, e tutte dirette dal di fuori al di dentro, o dal di dentro al di fuori, nel piano del poligono: queste potenze saranno in equilibrio.* Fig. 29.

Menate le diagonali *AC*, *AD*: egli è dimostrato nella Statica, che due forze concorrenti in un punto, e la loro risultante, che passa necessariamente per questo punto medesimo, possono essere rappresentate dai lati d' un triangolo, che sieno perpendicolari ciascuno a ciascuna delle tre forze proposte. Così le due forze *P* e *Q* essendo perpendicolari e proporzionali

nali ai lati AB, BC del triangolo ABC hanno per risultante una forza (che chiamo X) perpendicolare, e proporzionale al lato AC del medesimo triangolo. Inoltre la forza X è perpendicolare ad AC nel punto di mezzo; imperciocchè ella deve passare per il punto a di concorso delle due forze componenti P, Q, che è evidentemente il centro d'un cerchio, che si circoscriverebbe al triangolo ABC; d'onde ne risulta che la forza X è perpendicolare ad AC sul mezzo per esser corda del detto cerchio. Si dimostrerà similmente, che le due forze X ed R concorrenti nel punto b hanno per risultante una forza Y, proporzionale ad AD, e perpendicolare sul suo mezzo; che le due forze Y ed S, concorrenti al punto c, hanno per risultante una forza Z proporzionale ad AE, e perpendicolare sul suo mezzo; e così di seguito, se il poligono avesse un maggior numero di lati. Dunque le potenze P, Q, R, S hanno per risultante una forza Z uguale e direttamente opposta all'ultima forza T; dunque tutto il sistema delle forze P, Q, R, S, T è in equilibrio.

COROLLARIO I.

68. Si vede, che la dimostrazione precedente ha sempre luogo qualunque sia il numero de' lati del poligono, e per conseguenza anche quando il numero di questi lati diventa infinito. Dunque se si concepisce una curva

rien-

rientrante qualunque, infleſſibile, diviſa in una infinità d'elementi, e che ai mezzi di queſti elementi ſi applichino perpendicolarmente delle potenze, che loro ſieno proporzionali: queſte potenze ſaranno in equilibrio.

Sarà lo ſteſſo, ſe a tutti i punti d'una curva rientrante, infleſſibile, ſaranno applicate perpendicolarmente delle potenze uguali; imperciocchè da queſte potenze ne riſulteranno evidentemente forze proporzionali agli elementi della curva, e perpendicolari ſui loro mezzi.

COROLLARIO II.

69. Conſideriamo il poligono *ABCDE* come la ſezione, che ſi avrebbe tagliando un priſma retto pel mezzo della ſua altezza, e parallelamente alle ſue due baſi oppoſte: egli è chiaro, che i mezzi di queſti lati *AB*, *BC*, ec. ſono i centri di gravità delle faccie rettangolari del priſma, e che ſe a queſti medeſimi punti ſi applicano potenze perpendicolari, e proporzionali alle faccie ora nominate, queſte potenze avranno tra ſe i medeſimi rapporti, che le potenze *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*. Ora le potenze *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* ſono in equilibrio; dunque anche le potenze perpendicolari ai centri di gravità delle faccie rettangolari d'un priſma retto, e proporzionali a queſte faccie ſteſſe, ſaranno in equilibrio.

Lo ſteſſo riſultato ſi ha, allorquando la

fezione, e le bafi oppofte del prisma fono curve; ed allorquando a tutti i punti delle faccie rettangolari del corpo prifmatico fono applicate perpendicolarmente potenze uguali.

LEMMA II.

70. *Se ad un punto* G (Fig. 30.) *nel mezzo della larghezza media* EF *d' un trapezio* ACDB, *è applicata una forza* P *perpendicolare, e proporzionale alla fuperficie del trapezio : quefta forza potrà decomporfi in due altre, l' una perpendicolare, e proporzionale alla projezione ortogonale* AcdB (*) *del trapezio, l' altra perpendicolare, e proporzionale al rettangolo* LEMNFK, *che è perpendicolare ai due piani paralleli* AcdB, MCDN, *dai quali è terminato*.

Menate nella direzione della potenza *P*, e perpendicolarmente alle rette parallele *AB*, *CD*, *cd*, *LK*, *EF*, *MN* il piano *SRT*, che sarà per confeguenza perpendicolare ai piani *ACDB*, *AcdB*, *CDdc*, *LMNK*; decomponete poi la forza *P* in due altre *V*, *H* dirette nel piano *SRT*, la prima *V* perpendicolare ad *ST*, la seconda *H* perpendicolare ad *RT*. Ciò pofto, effendo le tre forze *P*, *V*, *H* perpendicolari ai tre lati del

(*) Si chiama *projezione ortogonale* d' una figura, quella, che è formata fopra un piano dalle perpendicolari abbaffate da tutti i punti della figura propofta.

del triangolo RST, si avrà $P:V:H::SR:ST:RT$ o ML, ossia (moltiplicando i conseguenti per linee uguali) $P:V:H::SR \times EF:ST \times LK:ML \times LK::ACDB:AcdB:LMNK$. Ora la direzione della forza V è perpendicolare ad $AcdB$, e quella della forza H è perpendicolare ad $LMNK$. Dunque ec.

COROLLARIO.

71. Se l'altezza SR del trapezio $ACDB$ è infinitamente piccola, il punto G sarà il centro di gravità del trapezio medesimo, il punto g situato sulla linea GV sarà il centro di gravità della projezione $AcdB$: e siccome il punto G è sempre il centro di gravità del rettangolo $LMNK$; ne segue che, se al centro di gravità d'un trapezio infinitamente piccolo è applicata una forza perpendicolare, e proporzionale alla sua superficie, questa forza potrà decomporsi in due altre, di cui la prima sia perpendicolare, e proporzionale alla superficie del trapezio di projezione, la seconda sia perpendicolare, e proporzionale alla superficie d'un rettangolo, che ha la base uguale alla larghezza media del trapezio, e per altezza la distanza compresa tra due piani paralleli guidati per le basi opposte e parallele del trapezio, e sopra l'uno de' quali viene fatta la projezione ortogonale di questo trapezio medesimo.

Non occorre di far osservare che, se il

trapezio $ACDB$ sarà infinitesimo, può riguardarsi la potenza P come la risultante d'una infinità di potenze uguali applicate perpendicolarmente a tutti i punti del trapezio $ACDB$, e per conseguenza la potenza V, come la risultante d'una infinità di potenze uguali applicate perpendicolarmente a tutti i punti del trapezio di projezione $AcdB$, e la potenza H come la risultante d'una infinità di potenze uguali applicate perpendicolarmente a tutti i punti del rettangolo $LMNK$.

TEOREMA I.

Fig. 31. 72. *Un corpo solido* A (Fig. 31.), *immerso in un fluido* MN, *è sollevato verticalmente da questo fluido, con una forza, la di cui quantità ha per misura il peso del fluido rimosso, e la di cui direzione passa per il centro di gravità di questo medesimo fluido rimosso, o, ciò che è lo stesso, per il centro di gravità della parte del corpo immersa nel fluido, e considerata come omogenea.*

Immaginiamoci, che la parte del corpo tuffata nel fluido sia divisa in una infinità di strati dai piani orizzontali Ss, Rr; e che in seguito la fascia, che involge ciascuno strato, e che ne forma la superficie convessa, sia divisa in una infinità di trapezj. Sia G il centro di gravità di un qualunque X di questi trapezj laterali; dal punto G meniamo la verticale Gg, che termini al livello del fluido, e la PG perpendicolare alla

su-

ſuperficie del trapezio, e ſupponiamo, che il piano *MSN* paſſi per queſte due linee. Egli è evidente, che *SR* è l' altezza del trapezio, e che menando le verticali *SL*, *RK*, la picciola retta *LK* ſarà l' altezza del trapezio di projezione ortogonale ſopra la ſuperficie del fluido; di modo che, ſe ſi chiama *B* la larghezza media del trapezio *X*, la quale è anche quella del trapezio di projezione, la ſuperficie del trapezio *X* ſarà $= B \times SR$, e la ſuperficie del trapezio di projezione $= B \times LK$. In oltre la ſuperficie del rettángolo, la di cui base è $= B$, e la di cui altezza è *Ry* diſtanza de' due piani orizzontali *Ss*, *Rr*, avrà per valore $B \times yR$.

Ora ciaſcuno de' trapezi componenti la ſuperficie conveſſa d' uno ſtrato potendo conſiderarſi come una parte di parete d' un vaſo, egli è chiaro, che il trapezio *X* è ſpinto perpendicolarmente, o ſecondo la direzione *PG*, con una forza *P*, che ha per valore $B \times SR \times Gg$, ſuppoſto la gravità ſpecifica del fluido $= 1$. Decomponiamo la forza *P* in due altre, ſituate nel piano *MSN*, l' una *V* verticale, l' altra *H* orizzontale. Eſſendo la retta *Gg* la medeſima per tutti i trapezj laterali d' un medeſimo ſtrato, la forza *P*, il di cui valore aſſoluto è $B \times SR \times Gg$, può ſupporſi proporzionale a $B \times SR$, per tutti queſti trapezj; ed allora (70) la forza *V* ſarà proporzionale a $B \times LK$, e la forza *H* ſarà proporzionale a $B \times yR$. Ora (69), tutte le

forze H, corrifpondenti a tutti i rettangoli $B \times yR$, per un medefimo ftrato fi fanno equilibrio. Per confeguenza non vi reftano, che le forze V: e ficcome il valore affoluto della forza P è $B \times SR \times Gg$; il valore affoluto della forza V farà $B \times LK \times Gg$, efpreffione, che è quella del piccolo folido compofto dai filetti verticali comprefi fra il trapezio X e la fua projezione, poichè un tal folido può confiderarfi come generato da tutti i punti del trapezio di projezione, che fi foffero moffi verticalmente fino alla fuperficie X. Così ciascun trapezio laterale è fpinto verticalmente con una forza, che è uguale al piccolo solido corrifpondente, e che di più paffa evidentemente per il centro di gravità di quefto folido fteffo. Ora il fluido efcluso dal corpo A non è altro, che la fomma di tutti quefti piccoli folidi. Dunque la fomma o la risultante di tutte le forze, che fpingono verticalmente il corpo A da baffo in alto è uguale al pefo del fluido rimoffo, e paffa per il centro di gravità di quefto fluido, o per quello della parte MSN del corpo tuffata nel fluido e confiderata come omogenea.

COROLLARIO I.

73. Poichè il fluido tende a follevare il corpo A, e per lo contrario il corpo tende a discendere pel fuo proprio pefo; ne fegue, che quefto medefimo corpo non falirà,

nè

nè difcenderà, fe quefte due forze, alle quali foltanto lo fuppongo fottopofto, fono tra fe uguali. Ora chiamando M il volume totale del corpo A; N il volume della fua parte immerfa, o il volume del fluido, che effo rimove; p la gravità specifica del corpo; ϖ la gravità specifica del fluido: fi vede, che il pefo affoluto del corpo è $= p \times M$, e che la fpinta verticale del fluido, la di cui mifura è il pefo affoluto del fluido rimoffo, farà $\varpi \times N$. Così il corpo A nè falirà, nè difcenderà, fe fi ha l' equazione $\varpi \times N = p \times M$.

Queft' equazione fa vedere, 1.° che, fe $\varpi = p$, fi avrà $N = M$; cioè, che, fe il corpo galleggiante, ed il fluido hanno la medefima gravità fpecifica, il corpo s' immergerà interamente nel fluido, e fi terrà altronde indifferentemente a qualfivoglia profondità.

2.° Se fi ha $p < \varpi$, fi avrà $N < M$; cioè, fe il corpo galleggiante ha una gravità fpecifica minore di quella del fluido, effo non s' immergerà che per una parte.

3.° Siccome il maffimo valore, che poffa avere N è M, fe fi ha $p > \varpi$, fi avrà $p \times M > \varpi \times N$; dunque allora il corpo A cafcherà al fondo del vafo e tenderà a discendere, o premerà il fondo del vafo con una forza $= p \times M - \varpi \times N = (p - \varpi) M$, poichè in quefto caso N diventa M.

Si vede di quì il motivo, per cui fi ha

maggior difficoltà a ſostenere un peſo fuori dell' acqua, che a ſostenerlo quando vi è immerſo: nel primo caſo ſi ſostiene tutto il peſo del corpo; nel secondo ſi ſostiene ſoltanto l' eccesſo del peſo del corpo ſopra il peſo dell' acqua, di cui il corpo occupa il luogo.

COROLLARIO II.

74. Affine che un corpo grave, e galleggiante liberamente ſopra un fluido non abbia alcun moto nè di ſalita, nè di diſceſa, nè inoltre alcun moto di rotazione, biſogna, 1.° che il peſo del corpo ſia uguale al peſo del fluido rimoſſo; 2.° che il centro di gravità del corpo e quello della ſua parte immerſa, conſiderata come omogenea, ſieno collocati ſopra una medeſima linea verticale. Imperocchè, per l' equilibrio aſſoluto, le due forze, alle quali il corpo è ſottopoſto, devono eſſere uguali, ed inoltre direttamente oppoſte.

Quando queſte condizioni non hanno luogo in un tempo ſteſſo, il corpo oſcilla e non giugne mai all' equilibrio, ſe non quando, avendo la reſiſtenza dell' acqua e dell' aria, o altre cauſe diſtrutti tutti i ſuoi moti, eſſo trova in fine e conſerva una ſituazione tale, che il ſuo peſo, e la ſpinta verticale del fluido ſcambievolmente ſi diſtruggono. Si vede di quì, che ſe ſi vuole che un vaſcello galleggiante ſul mare s' immerga nell' acqua per una parte *de-*

ter-

terminata del ſuo volume, biſogna talmente proporzionare e diſtribuire il carico, che aggiugnendo il ſuo peſo a quello del carcaſſo ſteſſo del vaſcello, la ſomma ſia uguale al peſo del volume d'acqua, che deve eſſer eſclusa, e che inoltre i centri di gravità di queſti due peſi ſieno ſituati in una medeſima linea verticale.

Daremo in appreſſo un problema, che ſi rapporta a queſto Corollario.

TEOREMA II.

75. *Se ſi immerge in un fluido un corpo ſolido ſpecificamente più peſante del fluido ſteſſo: queſto corpo vi perderà una parte del suo peſo tale, che ſi avrà queſta proporzione: il peso aſſoluto del corpo ſta alla perdita del peso, che fa nel fluido, come la gravità ſpecifica del corpo ſta alla gravità ſpecifica del fluido.*

Imperocchè per eſſere il corpo ſpecificamente più peſante che il fluido, eſſo vi ſi immerge intieramente (73 n.° 3), e ſe ſi chiama M il volume del corpo, p la sua gravità ſpecifica, ϖ la gravità ſpecifica del fluido; il corpo tenderà a diſcendere con una forza $= M \times (p - \varpi)$. Per fare equilibrio a queſta forza, opponiamle una forza Q, che le ſia uguale e direttamente contraria, o che poſſa conſiderarſi adempire queſta condizione: ſi avrà $Q = M(p - \varpi)$; ovvero $pM - Q = M\varpi$; oppure $p \times (pM - Q) = p \times M\varpi$; da cui ſi

trae

trae $pM : pM - Q :: p : \varpi$, che è la proporzione enunciata nel Teorema.

COROLLARIO.

76. Si vede perciò, che conoscendo il peso assoluto d' un corpo solido, che s' immerge intieramente in un fluido, o che è specificamente più grave di questo fluido, e la perdita del peso, che fa il corpo stesso immerso nel fluido: si conoscerà la gravità specifica del fluido, allorchè quella del corpo sarà data, ovvero reciprocamente la gravità specifica del corpo, quando sarà data quella del fluido.

TEOREMA III.

77. *Se si immerge in due fluidi differenti uno stesso corpo solido specificamente più pesante, che ciascuno d' essi: le gravità specifiche de' due fluidi saranno tra se come le perdite di peso, che il corpo fa ne' fluidi medesimi.*

Poichè sia M il volume del corpo proposto, p la sua gravità specifica, ϖ e ϖ' le gravità specifiche de' fluidi, Q e Q' i due contrappesi del corpo, cioè le forze, che è d' uopo impiegare per impedirgli di discendere ne' due fluidi: si avranno le due equazioni, $Q = M(p - \varpi)$, $Q' = M(p - \varpi')$. La prima dà $M = \frac{pM - Q}{\varpi}$; e la seconda, $M = \frac{pM - Q'}{\varpi'}$.

Dun-

Dunque $\frac{pM - Q}{\varpi} = \frac{pM - Q'}{\varpi'}$, ovvero $(pM - Q)\varpi' = (pM - Q')\varpi$; da cui si cava $\varpi : \varpi' :: pM - Q : pM - Q'$, che è la proporzione del Teorema.

COROLLARIO.

78. Conoscendo le perdite di peso, che fa un medesimo corpo immerso successivamente in due fluidi, e la gravità specifica di uno d'essi, si conoscerà anche la gravità specifica dell'altro.

TEOREMA IV.

79. *Se si immergono in un medesimo fluido due corpi ciascuno specificamente più pesante del fluido stesso, e questi corpi perdono parti uguali del loro peso: essi avranno volumi uguali.*

Poichè sieno M ed M' i volumi de' due corpi; p e p' le loro gravità specifiche; Q e Q' i loro contrappesi; ϖ la gravità specifica del fluido: si avranno le equazioni $Q = pM - \varpi M$, $Q' = p'M' - \varpi M'$. Dunque se si suppone, che i due corpi perdano nel fluido parti uguali del loro peso, o che si abbia $pM - Q = p'M' - Q'$, si avrà anche $\varpi M = \varpi M'$, ossia $M = M'$; cioè i volumi de'due corpi saranno uguali (*).

co-

(*) Si può anche dimostrare il presente Teorema in quest' altro modo: poichè la perdita di peso che

COROLLARIO.

80. Di quì ne segue il modo di risolvere il Problema che JERONE Re di Siracusa propose ad ARCHIMEDE. Ecco in che consiste questo Problema.

JERONE avendo fatto fare una corona, che secondo le sue convenzioni coll' Orefice, doveva essere d' oro puro, e sospettando che vi avesse mescolato dell' argento, domandò ad ARCHIMEDE il modo di appurare questo sospetto senza guastare la corona. Non si sa precisamente di quai mezzi ARCHIMEDE abbia fatt' uso per venirne a capo, ma havvi tutta l' apparenza, che procedesse nel modo seguente.

Poichè i corpi, che in un medesimo fluido perdono parti uguali del loro peso hanno volumi uguali, egli è chiaro che se si prende una verga d' oro, tale che l' eccesso del suo peso nell' aria, o nel vuoto, sopra il suo peso nell' acqua, sia uguale all' eccesso del peso della corona nel vuoto sopra il suo peso nell' acqua, questa verga, e la corona avranno volumi eguali. Nello stesso modo si determinerà una verga d' argento dello stesso volume della corona.

Ciò

che fa un corpo immerso in un fluido è sempre il peso del fluido rimosso, è chiaro che se le perdite di peso di due corpi sono uguali, devono pur essere uguali i fluidi rimossi; e quindi i volumi de' corpi che li rimovono.

Ciò posto, se si trova che nel vuoto la corona pesi meno della verga d'oro, e più della verga d'argento, e se si è altronde sicuro ch'essa contenga soltanto oro ed argento, si concluderà, che non è nè d'oro, nè d'argento puro, ma d'un composto di questi due metalli; e si troverà ciò che vi entra di ciascuno d'essi con una semplice regola d'alligazione, di cui ecco l'operazione. Dal peso della verga d'oro bisogna sottrarre il peso della verga d'argento; ciò che darà un residuo, che si farà servire di denominatore comune alle due frazioni, di cui l'una ha per numeratore l'eccesso del peso della verga d'oro sopra il peso della corona; l'altra per numeratore pure l'eccesso del peso della corona, sopra il peso della verga d'argento. La prima frazione esprime la quantità d'argento, la seconda la quantità d'oro, di cui la corona è composta.

La quistione si risolverebbe collo stesso procedere, se la corona fosse composta di due altri differenti metalli, di cui si conoscessero le specie. Ma questo metodo sarebbe insufficiente, se la specie dei metalli fosse incognita, se non si sapesse, per es. nel Problema precedente, che la corona non contiene che oro, ed argento; poichè egli è chiaro che si può fare con dell'oro ed un altro metallo, per es. rame, un misto del medesimo peso e del medesimo volume, che un misto composto d'oro e d'argento.

to.

to. Inoltre se la corona contenesse più di due specie di metalli, che si sapesse per es. ch' ella è composta d'oro, d'argento e di rame, il Problema sarebbe indeterminato; imperciocchè si possono combinare insieme questi tre metalli in diversi modi, tali che il misto risultante abbia sempre il medesimo peso ed il medesimo volume. *A forziori* deve dirsi lo stesso per un maggior numero di metalli. Passo al Problema enunciato alla fine dell' articolo 74.

PROBLEMA.

81. *Trovare la posizione, che deve prendere il triangolo omogeneo* ESG (Fig. 32), *gallegiante sul fluido* MN, *affine di restare in equilibrio, supponendo ch' esso non abbia che un solo angolo* S *immerso nel fluido*.

Fig. 32.

Le due condizioni richieste per l' equilibrio (74) sono, 1° che il peso assoluto del triangolo *ESG* deve essere uguale al peso assoluto del triangolo d'acqua *MSN*. 2° Che i centri di gravità *R* ed *O* de' due triangoli *ESG*, *MSN* devono trovarsi in una medesima linea *RO* verticale, e per conseguenza perpendicolare alla superficie *MN* del fluido. Ecco il modo di adempirle.

Divise le basi *EG*, *MN* de' due triangoli *ESG*, *MSN*, ciascuna in due parti uguali nei punti *P*, *Q*, sieno tirate le rette *SP*, *SQ*, sopra le quali si prenderanno le parti

SR

$SR = \frac{2}{3} SP$, $SO = \frac{2}{3} SQ$, per determinare i centri di gravità R, O de' due medesimi triangoli. Sieno guidate le rette RO, PQ, che saranno tra se parallele, poichè i lati del triangolo SPQ sono tagliati proporzionalmente in R ed O; ed inoltre perpendicolari ad MN, poichè RO dev' essere verticale. Dal punto P sieno abbassate le perpendicolari PA, PD sopra i lati SE, SG del triangolo ESG, prolungati se fa bisogno, e sieno tirate le rette PM, PN, che sono evidentemente uguali tra se, a motivo di $QM = QN$, e di PQ perpendicolare sopra MN.

supponiamo
- SE . . . . $= a$
- SG . . . . . . , . $= b$
- SP . . . . $= c$
- il seno tutto . . . . . $= 1$
- il seno dell' angolo dato $PSE = f$
- il suo coseno . . . . $= g$
- il seno dell' angolo parimente dato PSG . . . $= h$
- il suo coseno . . . . . $= k$
- SM . . . . $= x$
- SN . . . . $= y$
- la gravità specifica del triangolo $= p$
- la gravita specifica del fluido $= \varpi$

I due triangoli ESG, MSN, che hanno l'angolo comune S, sono tra ſe come i prodotti $SE \times SG$, $SM \times SN$. Così ſi avrà per la prima condizione dell' equilibrio,

$$pab = \varpi x y.$$

Le regole di Trigonometria danno pel triangolo rettangolo PAS,
ſen. tutt. (1) : ſen. PSA (f) : : PS (c) : $PA = cf$;
e
ſen. tutt. (1) : ſen. SPA, o coſ. PSA (g) : : PS (c) : $SA = cg$.
Parimente pel triangolo rettangolo PDS,

$$PD = ch,$$

$$SD = ck.$$

Dunque

$$AM = cg - x;$$

$$DN = ck - y;$$

$$(PM)^2 = c^2f^2 + (cg - x)^2;$$

$$(PN)^2 = c^2h^2 + (ck - y)^2.$$

Ora

$$(PM)^2 = (PN)^2;$$

così ſi avrà l'equazione

$$c^2f^2 + (cg - x)^2 = c^2h^2 + (ck - y)^2;$$

oſſia

$$c^2f^2 + c^2g^2 - 2cgx + x^2 = c^2h^2 + c^2k^2 - 2cky + yy,$$

la

la quale (osservando che $f^2+g^2=1$, $h^2+k^2=1$, e riducendo) diviene

$$xx-2cgx=yy-2cky.$$

E questa equazione è quella che adempie la seconda condizione dell' equilibrio.

Sostituendo in questa equazione medesima, in luogo di y il suo valore $\frac{pab}{\varpi x}$ dato per la prima si avrà

$$xx-2cgx=\frac{p^2a^2b^2}{\varpi^2x^2}-\frac{2ckpab}{\varpi x};$$

da cui si trae l'equazione determinata di quarto grado.

$$x^4-2cgx^3+\frac{2ckpabx}{\varpi}-\frac{p^2a^2b^2}{\varpi^2}=0.$$

Vi saranno adunque tante situazioni per l'equilibrio, quante saranno le radici reali e positive in questa equazione. V' aggiungo la restrizione *positive*, mentre la gravità non avendo che una direzione, la retta SM in conseguenza non può essere situata, che da una sola parte per rapporto al punto S.

Conoscendo x, si conoscerà y dall' equazione $y=\frac{pab}{\varpi x}$.

Se si fosse cominciato dall' eliminare x, si sarebbe egualmente giunto ad una equazione di quarto grado per y; indi si sarebbe trovato x dall' equazione $x=\frac{pab}{\varpi y}$.

Gli altri problemi della stessa natura si risolveranno coi medesimi principj, cioè soddisfacendo alle due condizioni richieste per l'equilibrio assoluto.

Fine dell' Idrostatica.

PAR-

PARTE SECONDA

ELEMENTI D'IDRAULICA.

CAPO PRIMO.

Principj generali del moto de' Fluidi.

82. Il principio d' ugualtà di pressione dà facilmente tutte le proprietà dell' equilibrio de' fluidi: Egli può anche servire per trovare le equazioni del loro moto; imperciocchè le variazioni, che succedono ne' moti d' un sistema qualunque di corpi si formano necessariamente in tal modo, che i moti opposti si distruggono, o si fanno equilibrio; d' onde ne segue, che conoscendo pel principio d' ugualtà di pressione le condizioni dell' equilibrio de' moti perduti in ciascuno istante dal fluido, si conoscerebbe anche il moto, ch' esso conserva. Ma le formole stabilite su questa considerazione sono sì complicate, che siamo costretti di abbandonarle, e di ricorrere all' esperienza per trovarvi il fondamento d' una nuova Idraulica, in vero meno

rigorosa, ma più semplice e più usuale.

83. Si è osservato che quando un fluido esce da un vaso per un' apertura fatta al fondo, o alle pareti, la sua superficie rimane sempre orizzontale, almeno sensibilmente, e facendo anche astrazione dalla causa, che produce al di sopra dell' orifizio una specie d' imbuto, quando la superficie del fluido è molto vicina all' orifizio medesimo. Dal che si è concluso 1.° che figurandosi diviso il fluido in una infinità di strati orizzontali, questi strati, a misura che s' abbassano, conservano sensibilmente il loro parallelismo; 2.° che ciascun punto d' un medesimo strato discende verticalmente, a riserva però de' punti, che s' avvicinano alle pareti supposte inclinate, il di cui numero però è infinitamente piccolo per rapporto a quello degli altri punti dello strato medesimo. La maggior parte delle opere, che sono state scritte sul moto de' fluidi, sono fondate su queste due ipotesi. Noi faremo a questo proposito alcune osservazioni essenziali.

84. Sia *ABCD* (Fig. 33 e 34) un vaso, che contiene dell' acqua, la quale esce dall' apertura orizzontale, o laterale *PQ*. Le particelle fluide, per la loro estrema mobilità, e per la pressione, che sentono in virtù della gravità, si portano necessariamente verso il luogo, che loro presenta la minore resistenza; dal che ne segue, ch' esse devono tendere verso l' orifi-

zio,

zio, poichè il fluido ha la libertà di uscire per questa parte. Ma le forze, che le animano, si combattono scambievolmente, e si contrabbilanciano in modo che fino ad una certa distanza dall' orifizio, come per es. di 4 a 5 pollici, le due condizioni suddette sono osservate. In vicinanza dell' orifizio poi le particelle, che non vi rispondono verticalmente, si distolgono dalla direzione verticale in un modo sensibile, e vengono ad imboccar l' orifizio con moti più o meno obliqui. Questi moti, che in parte si combattono, conservansi per qualche estensione, e la vena fluida all' uscire dall' orifizio *PQ* si ristringe, o si *contrae*; ella forma sull' altezza *Pp* una specie di piramide troncata *PQqp*, la di cui base più piccola *pq* corrisponde al luogo, dove la vena cessa di ristringersi per cominciare a prendere la forma prismatica. Egli è essenziale d' aver riguardo a questa *contrazione della vena fluida*, per misurare esattamente i prodotti de' serbatoj per orifizj dati. Essa è molto sensibile negli efflussi, che si fanno da orifizj fatti in sottili pareti; poichè allora si vede la vena ristrignersi considerabilmente all' uscire dell' orifizio: io trovai coll' esperienza, che l' area dell' orifizio *PQ* è all' area della sezione *pq* della maggior contrazione, come 8 a 5 in circa; e che questa sezione *pq* è distante da *PQ* d' una quantità, che non sorpassa di molto il raggio dell' orifizio *PQ*. Allorchè l' efflusso si fa per

tubi cilindrici adattati al ſerbatojo, corti, ma però d'una lunghezza ſufficiente, perchè l'acqua ne ſegua le pareti ed esca a *bocca aperta*, la contrazione della vena ha ſempre luogo verſo l'alto di queſti tubi *addizionali*; ma eſſa è minore, che nel primo caſo, poichè i cerchj interiori di queſti tubi sono alla ſezione della vena contratta come 8 a $6 \frac{1}{2}$ in circa. Io ho ampiamente discuſſo tutta queſta materia coll'esperienze, nell'Opera di cui queſta ne è il riſtretto.

Siccome queſti detagli mi porterebbero troppo in lungo, ed io mi propongo qui ſemplicemente di dare la teoria de' fluſſi, ſi avrà cura di diminuire l'orifizio nel rapporto, che la contrazione richiede, e ſi riguarderà l'orifizio così corretto, come quello, pel quale il fluſſo vien fatto. Così, quando l'acqua esce da un orifizio fatto in una ſottil parete, e la di cui area è $= A$, l'orifizio corretto ed impiegato nel calcolo ſarà $= \frac{5}{8} A$; ed allora quando l'acqua esce a bocca aperta per un tubo addizionale, la di cui base è $= A$, l'orifizio rettifficato ſarà $= \frac{13}{16} A$. Quanto all'altezza dell'acqua nel ſerbatojo la contiamo, nel primo caſo, dalla ſuperficie del fluido ſino al punto dove la vena ceſſa di riſtrignerſi; e nel ſecondo la prendiamo dalla ſuperficie del fluido ſino all'apertura eſteriore del tubo addizionale.

TEO-

TEOREMA I.

85. *Il volume di liquido, che esce da un vaso per un orifizio, è uguale al prodotto di questo orifizio per la velocità dell' uscita.*

Imperciocchè egli è evidente, che in ciascun istante esce un numero di punti fluidi tanto maggiore, quanto più è l' estensione dell' orifizio, e quanto su questa estensione ciascun punto fluido esce con maggiore velocità.

SCOLIO.

86. Si deve osservare, che ho detto il *volume*, e non la *massa*. Così, essendo i medesimi l' orifizio, e la velocità, uscirebbe nello stesso tempo il medesimo volume d' acqua, e di mercurio; ma la massa dell' acqua sarebbe a quella del mercurio, come 1 a 14, essendo le masse proporzionali ai pesi, ed essendo il peso dell' acqua a quello del mercurio, sotto lo stesso volume, come sono i numeri 1 e 14 in circa.

TEOREMA II.

87. *Se si divide un fluido* ABCD, *che scorre per l' orifizio* pq *in una infinità di strati* ADda, TVut, RLlr *eguali in volume con piani orizzontali, o in generale con superficie perpendicolari alle direzioni delle volocità delle particelle: le velo-*

cità di queste particelle saranno tra di loro in ragione inversa delle basi superiori, o inferiori degli strati.

In fatti, egli è chiaro, che si possono riguardare gli strati $ADda$, $TVut$, $RLlr$, come prismi, le di cui basi sono le sezioni AD, TV, RL, e le altezze le rette infinitamente piccole Aa, Tt, Rr; dunque poichè tutti questi strati hanno volumi eguali, si avrà, per es., $AD \times Aa = RL \times Rr$, ciò che dà $Aa : Rr :: RL : AD$. Ora a misura che uno strato s'abbassa della sua altezza, riempie sempre il suo luogo lo strato seguente; e così segue successivamente; dunque le altezze Aa, Rr, esprimono gli spazj percorsi in tempi uguali dagli strati $ADda$, $RLlr$, o, ciò che è lo stesso, le velocità di questi due strati. Per conseguenza la proporzione $Aa : Rr :: RL : AD$ torna all'enunciato del Teorema.

COROLLARIO

88. La medesima proporzione hà luogo per uno strato qualunque, preso nell'interiore del vaso, e per lo strato, che esce attualmente dall'orifizio. Dal che si vede che, se l'orifizio è infinitamente piccolo per rapporto alla sezione del vaso, che forma l'una delle basi dello strato interiore, la velocità, all'uscire dell'orifizio, sarà infinita per rapporto alla velocità dello strato interiore; o, ciò che è lo stesso, e ciò che ha realmente luogo, la velo-

cità

cità all' orifizio sarà finita, e la velocità dello strato interiore sarà infinitamente piccola.

Noi supporremo in ciò che segue, che l' orifizio sia infinitamente piccolo, cioè fisicamente picciolissimo, giacchè la teoria degli efflussi per orifizj grandi è troppo complicata per poter avere quì luogo.

CA-

CAPO II.

Dell' efflusso dell' acqua, che esce da un vaso per un piccolo orifizio.

TEOREMA

89. *La velocità d'un fluido, al suo uscire da un* Fig. 33. *vaso* ABCD (Fig. 33.), *per un orifizio infinitamente piccolo* pq, *è uguale a quella, che acquisterebbe un corpo pesante nel cader dall' altezza verticale* hq *della superficie del fluido al di sopra dell' orifizio.*

Immaginiamoci, che il liquido *ABCD* sia diviso in una infinità di strati uguali da superficie perdendicolari alle direzioni delle velocità delle particelle: poichè si è supposto l'orifizio infinitamente piccolo, per rapporto alle differenti sezioni del fluido nell' interiore del vaso, la velocità all' uscire dell' orifizio sarà finita, e le velocità degli strati superiori saranno infinitamente piccole (88). Ora per la teoria della caduta de' gravi, se tutte le molecole fluide fossero abbandonate all' azione libera della loro propria gravità, esse discenderebbero colla medesima velocità. Così, siccome gli strati superiori all' orifizio perdono la velocità, ch' essi avrebbono naturalmente per la gravità, egli è

evi-

evidente, che il picciolo prismetto fluido $pqgf$, che esce in ciascun istante, è premuto, o spinto dal liquido superiore con la medesima forza, con cui sarebbe spinto uno stantuffo, che si mettesse in pq, per impedire l' efflusso, cioè (21) con una forza espressa da $pq \times hq$, chiamando 1 la gravità specifica, o la densità del fluido.

Supponiamo, che durante l' istante, in cui la pressione $pq \times hq$ fa uscire il prismetto $pqgf$, la sola gravità assoluta d' un prismetto $pqxy$, la quale può esprimersi con $pq \times qx$, faccia percorrere la picciola altezza qx a questo medesimo prismetto $pqxy$, considerato come immobile al principio del suo moto. Essendo le forze motrici $pq \times hq$, $pq \times qx$ proporzionali alle quantità di moto, che esse producono, nello stesso tempo si avrà (chiamando V ed u le velocità delle masse $pqgf$, $pqxy$ ai punti q, x) $pq \times hq : pq \times qx :: pqgf \times V : pqxy \times u$; o semplicemente, $hq : qx :: pqgf \times V : pqxy \times u$. Ora le masse $pqgf$, $pqxy$ stanno tra se come i loro volumi, e questi volumi sono tra essi come i prodotti dell' orifizio per le velocità (85); ciò che dà $pqgf : pqxy :: pq \times V : pq \times u$. Dunque si avrà $hq : qx :: pq \times V \times V : pq \times u \times u$; cioè $hq : qx :: V^2 : u^2$.

Sia ora v la velocità che acquisterebbe un corpo grave cascando dall' altezza hq; si avrà $hq : qx :: v^2 : u^2$; ma si è trovato $hq : qx :: V^2 : u^2$;

dun-

dunque $v^2 : u^2 :: V^2 : u^2$, ciò che dà $V = v$, e fa vedere che la velocità V del fluido all' uſcir dell' orifizio è uguale alla velocità v, che acquiſterebbe un corpo peſante nel cadere dall' attuale altezza della ſuperficie del fluido al di ſopra dell' orifizio.

Avvertiremo di paſſaggio, che per accorciare il discorſo ſi dice ſovente, che la velocità, all' uſcire dell' orifizio, è *dovuta* all' altezza hq del fluido nel ſerbatojo; e noi ci ſerviremo di queſta espreſſione.

COROLLARIO I.

90. La medeſima propoſizione ha luogo anche per un orifizio laterale infinitamente picFig. 34. colo (Fig. 34.); imperciocchè la preſſione del fluido (ſotto una ſteſſa altezza) è uguale per ogni verſo, e deve per conſeguenza produrre la ſteſſa velocità all' uſcire dei due piccioliſſimi orifizj, uno orizzontale, e l' altro laterale, ſuppoſto che queſti due orifizj ſieno collocati alla medeſima diſtanza dalla ſuperficie ſuperiore dell' acqua.

COROLLARIO II.

91. Il liquido all' uſcire dell' orifizio ha una velocità capace di farlo riaſcendere ad una altezza uguale alla diſtanza verticale dell' orifizio dal piano orizzontale, che rade la ſuperficie del fluido nello ſteſſo modo, che un corpo nel

ca-

cadere per la sua gravità da una certa altezza, acquista una velocità capace di farlo rimontare a questa altezza medesima.

COROLLARIO III.

92. Si vede parimente, che se la velocità del liquido all' uscire dell' orifizio fosse uniformemente continuata, il liquido stesso percorrerebbe uno spazio eguale a $2hq$, nel medesimo tempo che un corpo grave impiegherebbe a cadere dall' altezza hq

SCOLIO.

93. I nostri Leggitori vedono benissimo, che la velocità del liquido, all' uscire dell' orifizio, sarà sempre la medesima sotto una medesima altezza hq, qualunque siasi la specie del liquido, poichè la misura di questa velocità è la velocità dovuta all'altezza hq. Così il Sig. BELIDOR s' inganna nel dire (*Architecture Hydraulique*, Tom. I., pag. 187), che le velocità di due liquidi differenti, come del mercurio e dell' acqua, sono tra se come le radici quadrate dei prodotti delle altezze per le gravità specifiche: queste velocità sono tra se semplicemente come le radici quadre delle altezze. Se il Sig. BELIDOR avesse osservato, nell' esempio, ch' egli dà (n.° 490.), che in fatti la colonna, che caccia il mercurio fuori d' uno dei vasi, è quattordici volte più pesante che la colonna, che

cac-

caccia l'acqua fuori dell' altro vaſo, ma che pure la maſſa cacciata nel primo caso è quattordici volte maggiore della maſſa cacciata nel ſecondo, egli avrebbe veduto facilmente, che la velocità doveva eſſere la medeſima in tutti e due i caſi. In generale, egli è evidente, che allorquando le forze motrici ſono proporzionali alle maſſe, ch' eſſe mettono in moto, le velocità ſono uguali.

SCOLIO.

94. La dimoſtrazione del Teorema precedente ſuppone a rigore, che l' orifizio ſia infinitamente piccolo; ma la propoſizione è anche fiſicamente vera, quando l' orifizio è finito, purchè nulla di meno eſſo ſia poco conſiderabile per rapporto alle differenti ſezioni orizzontali del vaſo. Allora la velocità all' uſcire dell' orifizio non è prodotta totalmente dalla preſſione della colonna ſuperiore. Ciaſcuna particella obbediſce nello ſteſſo tempo alla ſua propria gravità, ed alla azione delle particelle contigue, azione che è continuamente favorita, o contraſtata dalla aderenza reciproca. Ora ſi comprende, ſenza che ſia forſe poſſibile di dimoſtrarlo a rigore, che tutte queſte forze poſſono talmente combinarſi tra ſe, che la velocità del liquido all' uſcire dell' orifizio ſia la ſteſſa, che se foſſe prodotta dal peso della colonna ſuperiore. La cosa è almeno indubitata per l' eſperienza

rienza. Soltanto si osservi, che se l' orifizio è un poco grande, la velocità non acquista la sua pienezza uniforme, e permanente se non al fine d' un certo tempo; imperciocchè si trova allora, che la quantità di liquido, che esce ne' 3, o 4 primi secondi di efflusso, è un poco minore di quella, che esce ne' tre o quattro secondi seguenti. Quanto più l'orifizio è grande, tanto più questa inugualtà si fa conoscere.

PROBLEMA I.

95. *Supposto che un vaso* ABCD (Fig. 33, o 34), *il quale versa dell' acqua da un piccolo orifizio* pq, *si mantenga pieno alla medesima altezza* hq *al di sopra di questo orifizio, per mezzo d' un' acqua influente, che va continuamente a riempire il luogo di quella, che esce: si domanda un' equazione, che contenga la relazione tra la quantità d' acqua uscita, l' area dell' orifizio, il tempo dell' efflusso, e l' altezza* hq.

Fig. 33. 34.

Chiamiamo K l'area dell' orifizio pq; t il tempo della uscita; h l' altezza costante hq dell' acqua nel vaso al di sopra dell' orifizio; Q la quantità d' acqua uscita nel tempo t; θ il tempo *dato*, che un corpo grave impiega a cadere dall' altezza a, parimente data. Se si fa questa proporzione, $\sqrt{a} : \sqrt{h} :: \theta :$ un quarto termine, questo quarto termine $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$ sarà il tempo, che un corpo grave impiegherebbe a ca-

cadere dall' altezza h. Ora durante questo medesimo tempo esce (85, e 92) una colonna fluida, che ha l'area K per base, e $2h$ per altezza, poichè l'altezza h è costante, e per conseguenza la velocità all'uscire dall' orifizio riman sempre la stessa. Così la colonna o quantità di fluido, che esce nel tempo $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$, è espressa da $2Kh$. Ora egli è chiaro, che le quantità di fluido, che escono ne' tempi $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$, e t sono tra se come questi tempi; ciò che dà la proporzione $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}} : t :: 2Kh : Q$; da cui si cava $\theta Q = 2tK\sqrt{a}\sqrt{h}$, che è la formola dimandata.

COROLLARIO I.

96. Delle sei quantità comprese in questa formola due, cioè θ ed a, sono sempre date, e supporremo secondo l'esperienza, che essendo $a =$ piedi 15,1, θ è $=$ 1 secondo. Ma le quattro altre K, t, h, Q possono variare; e si vede che date tre di esse si conoscerà la quarta. Di quì si ha la soluzione delle quistioni seguenti.

I. *Conoscendo* K, t, h, *trovare* Q?

Questa quistione si risolve coll' equazione $Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{\theta}$. Per es. supponiamo che l'altez-

tezza h dell' acqua nel serbatojo sia di 12 piedi; che l' orifizio supposto circolare abbia 1 pollice di diametro; e che l' uscita dell' acqua duri 1 minuto. Mettendo questi dati nell' equazione precedente, ed anche mettendo piedi 15,1 per a, ed 1 secondo per θ si troverà $Q = 15216$ pollici cubici in circa. Se si vuole conoscere il peso di questa quantità d' acqua si farà la proporzione 1728 pollici cubici stanno a 15216 pollici cubici, come 70 libbre, peso del piede cubico d' acqua dolce, o di 1728 pollici cubici, stanno al peso cercato, che si troverà di 616 libbre in circa.

II. *Conoscendo* h, t, Q, *trovare* K?

Questa quistione si risolve coll' equazione $K = \frac{\theta Q}{2t\sqrt{ha}}$. Per es. sieno $t = 1$ minuto, $Q = 8$ piedi cubici, ossia 13824 pollici cubici, $h = 9$ piedi: si troverà che il valore di K è in circa la frazione decimale 0,824 d' un pollice quadrato.

Se l' orifizio dev' essere un cerchio si avrà (chiamando r il suo raggio) $r = \sqrt{\frac{7}{22}K}$, esprimendo la frazione $\frac{7}{22}$ il rapporto del diametro alla circonferenza; ciò che dà nel caso presente $r =$ linee $6\frac{1}{10}$ incirca.

III. *Conoscendo* h, K, Q, *trovare* t?

Questa quistione si risolve coll' equazione $t = \frac{\theta Q}{2K\sqrt{ha}}$. Per es. supponiamo $h = 9$ piedi,

$K = 1$ pollice quadrato, $Q = 40000$ pollici cubici: si troverà $t =$ secondi $143,05 = 2$ minuti 23 secondi in circa.

IV. *Conoscendo* Q, K, t, *trovare* h

Questa quistone si risolve coll' equazione $h = \frac{Q^2 \theta^2}{4 a t^2 K^2}$. Per es. sieno $Q = 40000$ pollici cubici, $K = 1$ pollice quadrato, $t = 4$ minuti $= 240$ secondi: si troverà $h =$ piedi 3 pollici 2 linee $4 \frac{2}{8}$ in circa.

COROLLARIO II.

97. *Le quantità* Q *e* Q′ *di liquido, che escono nel medesimo tempo dagli orifizj* K *e* K′, *sotto le altezze o cariche costanti* h, *ed* h′, *sono tra se come i prodotti degli orifizj per le radici quadrate delle altezze.*

Imperciocchè si hanno le due equazioni $Q = \frac{2 t K \sqrt{a h}}{\theta}$, $Q' = \frac{2 t K' \sqrt{a h'}}{\theta}$, le quali danno $Q : Q' :: K \sqrt{h} : K' \sqrt{h'}$. Così conoscendo, dall' esperienza, tutto ciò che è relativo all' uno degli efflussi, si potrà determinare anche tutto ciò che è relativo all' altro.

Per es. l' esperienza mi ha dimostrato che un orifizio circolare di 1 pollice di diametro fatto in una sottil parete, sotto 4 piedi di carico, dà 5436 pollici cubici d' acqua in un dato tempo: se io voglio sapere ciò che darà in detto tempo un orifizio di due pollici di dia-

diametro sotto 9 piedi di carico, farò la proporzione, $1 \times \sqrt{4} : 4 \times \sqrt{9} :: 5436$ pollici cubici : $x = 32616$ pollici cubici d' acqua.

SCOLIO I.

98. Si osserverà, che la contrazione della vena fluida modifica in una maniera simile gli efflussi per due orifizj della stessa natura, cioè o tutti e due fatti in una parete sottile, o tutti e due appartenenti a tubi addizionali; di modo che allora nella proporzione, $Q : Q' :: K\sqrt{h} : K'\sqrt{h'}$ si può fare astrazione dall' effetto della contrazione. Ma se l' uno degli efflussi si fa per un orifizio formato in una parete sottile, l' altro per un tubo addizionale, bisogna, per aver riguardo alla contrazione, diminuire nella proporzione precedente il primo orifizio nel rapporto di 8 a 5 ovvero di 16 a 10; ed il secondo nel rapporto di 8 a $6\frac{1}{2}$ ossia di 16 a 13.

SCOLIO II.

99. Nella pratica le acque escono sovente da aperture laterali, le quali, comunque piccole in confronto alle ampiezze o sezioni orizzontali de' serbatoj, non possono però considerarsi come aventi tutti i loro punti egualmente distanti dalla superficie del fluido. Tali sono per es. i pertugj de' Molini. Allora l'uso ordinario è di determinare gli efflussi riguardando l'orifizio come composto d' una infinità di orifizj

piccioli, a ciascuno de' quali corrisponde una velocità dovuta all'altezza del fluido al di sopra di esso, e prendendo la somma di tutte le quantità d'acqua uscite da tutti questi orifizj parziali. Non v' ha bisogno di far osservare che questo metodo è fondato su d'un principio che è vago ed ipotetico. Nulla di meno, siccome esso dà de' risultati assai conformi all'esperienza, io me ne servirò nella soluzione del Problema seguente.

PROBLEMA II.

Fig. 25.

100. *Determinare* (Fig. 35.) *la quantità* Q *d'acqua, che esce in un dato tempo da un orifizio rettangolare verticale* LNOM, *fatto nella parete verticale* ABCD *d'un vaso conservato pieno d'acqua all'altezza costante* VR?

Menate parallelamente alle basi opposte ed orizzontali LM, NO dell'orifizio le rette infinitamente vicine XZ, xz, che determinino il rettangolo elementare $XZzx$ della superficie dell'orifizio. Egli è evidente che tutti i punti di questo rettangolo possono riguardarsi come egualmente distanti dalla superficie del fluido. Supporremo pertanto che a ciascun d'essi corrisponda una velocità dovuta all'altezza VI. Così (chiamando t il tempo dell'efflusso, θ il tempo della caduta d'un corpo grave dall'altezza a), la quantità d'acqua, che uscirà nel tempo t, dal rettangolo $XZzx$, sarà espressa

(95)

(95) da $\frac{2XZ \times Ii \times t\sqrt{a}.\sqrt{VI}}{\theta}$, ossia dà $\frac{2XZ \times t\sqrt{a}}{\theta} \times Ii\sqrt{VI}$. La quistione si riduce ora a trovare la somma di tutte queste quantità elementari d'acqua, affine d'avere la quantità totale, che scorre dall' orifizio finito $LNOM$. Costruisco perciò sopra l'asse VR, con un parametro qualunque p, la parabola VT; e prolungo le rette KM, IZ, $i\zeta$, RO fino in Y, S, s, T. Il piccolo trapezio parabolico $ISsi$ (che può riguardarsi come un rettangolo, di cui IS sia la base, ed Ii l'altezza) ha per espressione $Ii \times IS$, ossia (per esser $IS = \sqrt{VI}.\sqrt{p}$) $Ii \times \sqrt{VI}.\sqrt{p}$. Dunque (chiamando e questo trapezio, q la quantità elementare d'acqua, che esce dal rettangolo $XZ\zeta x$), si avrà $e:q::$ $Ii \times \sqrt{VI}.\sqrt{p} : \frac{2XZ \times t\sqrt{a}}{\theta} \times Ii \times \sqrt{VI}$; ciò che dà $q = e \times \frac{2XZt\sqrt{a}}{\theta\sqrt{p}}$. Dove si vede che se si arriva a trovare la somma di tutti gli e, cioè la superficie parabolica $KRTY$, si avrà la somma dei q cioè la quantità totale Q d'acqua uscita dall' orifizio $LNOM$, moltiplicando l'area parabolica $KRTY$ per la frazione costante e data $\frac{2XZ.t\sqrt{a}}{\theta\sqrt{p}}$.

Compiuto il rettangolo $VRTH$, e menate le rette SG, sg parallele ad VR, osservo che

il triangolo parabolico esteriore VHT è composto d'elementi (*) SG, sg che sono proporzionali (per la proprietà della parabola) ai quadrati delle parti corrispondenti VG, Vg della retta VH. Dunque questi elementi crescono come le sezioni d'una piramide, che avesse il suo vertice in V, ed VH per altezza: d'onde ne segue che la somma delle GS, ossia l'area VHT è uguale al terzo del prodotto dell'altezza VH per la retta HT, che è l'ultima delle GS. Così lo spazio $VHT = \frac{VH \times HT}{3} = \frac{VR \times RT}{3}$; e per conseguenza lo spazio parabolico intiero $VRT = \frac{2}{3} VR \times RT$. Similmente lo spazio parabolico $VKY = \frac{2}{3} VK \times KY$. Per conseguenza lo spazio cercato $KRTY = \frac{2}{3}(VR \times RT - VK \times KY)$. Avremo dunque $Q = \frac{2}{3}(VR \times RT - VK \times KY) \times \frac{2XZ.t\sqrt{a}}{\theta\sqrt{p}}$; ossia (mettendo per RT il suo valore $\sqrt{VR}.\sqrt{p}$, e per KY il suo valore $\sqrt{VK}.\sqrt{p}$), $Q = \frac{4XZ.t\sqrt{a}(VR\sqrt{VR} - VK\sqrt{VK})}{3\theta}$, espressione in cui è tutto cognito.

SCO-

(*) Le rette SG, sg non sono propriamente gli elementi dell'area VHT; ma basta supporle d'una larghezza infinitesima per poterle considerare come tali.

SCOLIO.

101. Sovente in vece di determinare Q dalla formola precedente, ci contentiamo di prendere per altezza *media* dell' acqua, quella che corrisponde al centro di gravità dell' orifizio, e si suppone in conseguenza che tutti i punti fluidi escono con una medesima velocità dovuta a quest' altezza; ciò che dà Q con una precisione sufficiente per la maggior parte dei casi, che presentansi nella pratica.

PROBLEMA III.

102. *Supposto che il vaso* ApqD (Fig. 36) Fig. 36. *si vuoti per l' orifizio* pq, *senza ricevere della nuova acqua: si domanda il tempo che la superficie* AD *impiegherà a discendere dall' altezza data* hk, *per arrivare alla posizione* KH?

Supponiamo che al fine d' un certo tempo la superficie del liquido sia arrivata nella posizione indeterminata Mm. Menisi parallelamente a questo piano Mm il piano infinitamente vicino Nn. Egli è evidente, 1.° che durante l' istante, per cui Mm discende in Nn, esce dall' orifizio pq una quantità d' acqua uguale allo strato $MmnN$, che può riguardarsi come un prisma di cui Mm è la base, ed Ll l' altezza, e che per conseguenza ha per valore $Mm \times Ll$. 2.° Che durante questo istante medesimo l' altezza verticale Lq di Mm al di sopra

dell' orifizio può risguardarsi come castante; poichè diminuisce soltanto della quantità infinitesima Ll, che può negligentarsi in paragon di essa. D'onde ne segue (96, Quest. III.) che, chiamando K l'area dell' orifizio pq, θ il tempo, che un corpo grave impiega a cadere dall' altezza a, l'espressione dell' istante, o del tempo elementare impiegato a percorrere Ll sarà $\frac{\theta \times Mm \times Ll}{2K\sqrt{a}\,.\,\sqrt{Lq}}$. Rimane ora solo a trovare la somma di tutti questi tempi elementari, corrispondenti all' altezza hk.

Sulla retta IS, uguale e parallela ad hq, come asse, e con un parametro dato p, costruite una parabola SFT; prolungate indefinitamente le sezioni AD, Mm, Nn, KH del vaso per avere le ordinate corrispondenti IT, Vu, Rr, EF della parabola; costruite una seconda curva XZY, tale che ciascuna delle sue ordinate Va sia uguale al quoziente della sezione Mm divisa per l'ordinata Vu della parabola: allora il tempo impiegato a percorrere hk sarà uguale al prodotto della quantità costante $\frac{\theta\sqrt{p}}{2K\sqrt{a}}$ per l'area $IEZX$. Imperciocchè, siccome si ha per costruzione $Va = \frac{Mm}{Vu}$, e per proprietà della parabola $\sqrt{VS}$, ovvero

$\sqrt{Lq} = \frac{Vu}{\sqrt{p}}$, il tempo elementare $\frac{\theta \times Mm \times Ll}{2K \sqrt{a} . \sqrt{Lq}}$ diverrà (sostituendo $Va \times Vu$ ad Mm, $\frac{Vu}{\sqrt{p}}$ a $\sqrt{Lq}$, ed VR ad Ll), $\frac{\theta \sqrt{p}}{2K \sqrt{a}} \times Va \times VR$; espressione, che indica il prodotto della quantità costante $\frac{\theta \sqrt{p}}{2K \sqrt{a}}$ per l'elemento $VabR$ dell'area $IEZY$. Dunque (chiamando T il tempo corrispondente ad hk), si avrà $T = \frac{\theta \sqrt{p}}{2K \sqrt{a}} \times IEZX$.

COROLLARIO I.

103. Essendo costanti le quantità a, θ, p, K, egli è chiaro che i tempi impiegati a percorrere le altezze hL, Lk sono tra se come le aree corrispondenti $IVaX$, $VEZa$. Dunque se queste aree sono uguali, o in ràgione data, saranno pure i tempi uguali o in ragione data.

Supponiamo per es., che il vaso $ApqD$ sia un solido, generato attorno l'asse hq dalla rivoluzione d'una curva parabolica DHq, la di cui proprietà è che i quadrati delle sue ordinate hD, Lm, kH sono tra se come le radici quadrate delle ascisse corrispondenti qh, qL, qk. Allora le sezioni circolari AD, Mm, KH del vaso, che sono tra se come i quadrati de' loro raggi

raggi hD, Lm, kH, ſaranno come le radici quadrate delle aſciſſe qh, qL, qk, o come le ordinate IT, Vu, EF della parabola conica SFT. Dunque tutti i quozienti $\frac{AD}{IT}$, $\frac{Mm}{Vu}$, $\frac{KH}{EF}$ ſono uguali, ciò che dà per XZY una retta verticale; dunque le parti dell' altezza hk, ſuppoſte uguali, ſaranno percorſe in tempi uguali.

COROLLARIO II.

104. Conoſcendo l' altezza hk, ſi conoſce anche lo ſpazio $AKHD$, giacchè la figura del vaſo è data; e ſiccome ſi è trovato il tempo, che il fluido impiega ad abbaſſarſi da AD in KH: ne ſegue che ſi conoſcerà pure la quantità di liquido, che eſce durante queſto medeſimo tempo.

PROBLEMA IV.

105. *Suppoſto prismatico o cilindrico il vaso* ABCD (Fig. 37): *ſi dimanda il tempo, che il liquido impiegherà ad abbaſſarſi da* AD *in* KH?

Fig. 37.

Immaginiamoci che un corpo non grave ſia ſpinto da baſſo in alto per la verticale qh, da una forza acceleratrice coſtante, la quale gli imprima i medeſimi gradi di velocità, che la gravità imprime ad un corpo, che cade liberamente; di modo che il corpo aſcendendo percorra lo ſpazio qh colla ſteſſa legge, e nello ſteſſo tempo, in cui percorrerebbe lo ſpazio hq il corpo, che per la ſua gravità diſcende. Egli

è

è chiaro che le differenti velocità del corpo ascendente essendo proporzionali alle radici quadrate degli spazj percorsi corrispondenti, come lo sono quelle del corpo discendente, potranno esprimersi colle ordinate della parabola SFT. Supponiamo che il corpo ascendente arrivato in l percorra lo spazietto lL ovvero RV durante un tempo infinitesimo, con una velocità rappresentata dall' ordinata corrispondente Vu della parabola. Per trovare l' espressione di questo tempo elementare considero, che il tempo totale impiegato a percorrere qh è $\frac{\theta\sqrt{qh}}{\sqrt{a}}$; e che, se la velocità finale del corpo ascendente fosse continuata uniformemente, questo corpo percorrerebbe, durante lo stesso tempo $\frac{\theta\sqrt{qh}}{\sqrt{a}}$, uno spazio $= 2qh$. Ora ne' moti uniformi, gli spazj divisi per le velocità sono tra se come i tempi; dunque (esprimendo il tempo colla caratteristica T, posta avanti allo spazio percorso) avremo la proporzione $\frac{2qh}{IT} : \frac{RV}{Vu} ::$ $\frac{\theta\sqrt{qh}}{\sqrt{a}} : T.RV$; ciò che dà $T.RV =$ $\frac{\theta \times RV \times IT}{2Vu.\sqrt{a}.\sqrt{qh}}$, ossia (sostituendo $\sqrt{qh}$ al

suo

ſuo valore $\frac{IT}{\sqrt{p}}$), $T.RV = \frac{\theta\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \times \frac{RV}{2Vu}$.
Paragonando queſto picciol tempo col tempetto $\frac{\theta\sqrt{p}}{2K\sqrt{a}} \times Va \times VR$, che la ſuperficie dell' acqua impiega a percorrere lo ſteſſo ſpazio Ll ovvero VR (102); e conſiderando che, per coſtruzione, $Va = \frac{Mm}{Vu}$: ſi vedrà che il primo ſta al ſecondo, nel rapporto coſtante dell' area K dell' orifizio, all' area della ſezione Mm del vaso, la quale è sempre della medeſima eſtenſione in tutto il vaſo ſteſſo, per eſſerſi egli ſuppoſto priſmatico. Avendo luogo il medeſimo rapporto tra gli altri tempetti elementari, che il corpo aſcendente e la ſuperficie dell' acqua conſumano a percorrere ſpazietti uguali, ſi concluderà che il tempo totale impiegato dal corpo aſcendente a percorrere l' altezza qh, ſta al tempo totale, che impiegherebbe il vaso a vuotarſi affatto, come l' area K ſta all' area della baſe BC, che chiamo A. Così il tempo che conſuma il vaſo $ABCD$ a vuotarſi totalmente è $\frac{\theta\sqrt{hq}}{\sqrt{a}} \times \frac{A}{K}$.

Riguardando $KBCH$ come il vaso propoſto, ſi dimoſtrerà iſteſſamente, che il tempo impiègato da queſto vaſo a vuotarſi totalmente

è

è $\frac{6\sqrt{kq}}{\sqrt{a}} \times \frac{A}{K}$. Ora il tempo impiegato dalla ſuperficie dell' acqua ad abbaſſarſi da AD in KH è evidentemente uguale alla differenza dei due tempi, di cui ſi è parlato. Dunque

$$T, hk = \frac{6A(\sqrt{hq} - \sqrt{kq})}{K\sqrt{a}}.$$

SCOLIO.

106. Nello ſtato fiſico delle coſe, quando la ſuperficie del fluido s' avvicina all' orifizio, ſi forma al di ſopra di eſſo una ſpecie d' imbuto, nel quale s' introduce l' aria; ciò che impediſce in parte l' uſcita del fluido, e ne diſordina l' efflusso. La formola precedente non può dunque ſervire a determinare l' efflusso, ſe non ſino al momento dove l' imbuto incomincia a manifeſtarſi; ciò che ordinariamente accade quando la ſuperficie del fluido è di 3, o 4 pollici vicina all' orifizio.

COROLLARIO I.

107. La noſtra equazione $T. hk = \frac{6A(\sqrt{hq} - \sqrt{kq})}{K\sqrt{a}}$ dà il modo di coſtruire un *oriuolo a acqua* oſſia *cleſſidra* di forma cilindrica. Per eſ., trattiſi di dividere l'altezza AB in dodici parti, che ſieno percorſe in tempi uguali dalla ſuperficie del flui-

fluido: per essere il quadrato di $12 = 144$, si rappresenterà AB con 144 parti uguali; da queste 144 parti si sottrarrà 121, quadrato di 11, il residuo 23 farà conoscere la prima parte cercata AM; da 121 si sottrarrà 100, quadrato di 10, il residuo 21 farà conoscere la seconda parte cercata; da 100 si sottrarrà 81, quadrato di 9, il residuo 19 farà conoscere la terza parte, ec. Dal che si vede che le parti successive dell' altezza, che si cercano, sono espresse dalla serie de' numeri 23, 21, 19, 17, 15, ec.

Quanto alla misura precisa del tempo impiegato a percorrere ciascuna parte dell' altezza AB, si determinerà dalla nostra formola. Così se si vuole che questo tempo sia = 1 ora, si farà $t = 1$ ora, e bisognerà talmente proporzionare la base A e l' altezza h del vaso con l' area K dell' orifizio, che abbiasi 1 ora =

$$\frac{\theta A(\sqrt{h} - \sqrt{\tfrac{121}{144}h})}{K\sqrt{a}}, \text{ ovvero } 1 \text{ ora} = \frac{\theta A\sqrt{h}}{12K\sqrt{a}}.$$

Da quest' equazione si vede che delle tre quantità A, k, K, date due, si troverà anche la terza.

Nell' uso di queste *clessidre*, si avrà cura, conforme all' osservazione dell' articolo 106, di non aspettare che la superficie del fluido si avvicini di troppo al fondo, o di non impiegare, per es., che le undici prime divisioni.

co-

COROLLARIO II.

108. Se si ha un vaso prismatico $ABCD$, pieno fino in AD, e gli si permetta di vuotarsi totalmente; e poscia avendolo di nuovo riempito fino in AD, si trattenga costantemente pieno a quest' altezza, intanto che esce dell' acqua dall' orifizio pq; uscirà in questo secondo caso una quantità d' acqua, doppia di quella contenuta nello spazio $ABCD$, durante lo stesso intervallo di tempo, che il vaso ha impiegato a vuotarsi intieramente, facendo astrazione dall' imbuto. Imperciocchè, nel primo caso, il tempo, che impiega il vaso a vuotarsi totalmente, è espresso da $\frac{\theta A \sqrt{h}}{K \sqrt{a}}$ (105). Ora (95) la quantità di liquido, che esce nel secondo caso, durante il tempo $\frac{\theta A \sqrt{h}}{K \sqrt{a}}$, è espressa da $\frac{\theta A \sqrt{h}}{K \sqrt{a}} \times \frac{2K \sqrt{ah}}{\theta} = 2A.h$, quantità doppia del prisma $ABCD$, che è uguale ad $A.h$.

COROLLARIO III.

109. Quando si vorranno paragonate insieme i tempi degli efflussi di due vasi prismatici, che si vuotano, si osserverà che assegnando pel secondo vaso le quantità analoghe ad

hq

hq, hk, A, K, colle ſteſſe lettere accentate, ſi hanno le due equazioni $T.hk = \frac{\theta A(\sqrt{hq} - \sqrt{kq})}{K\sqrt{a}}$, $T.h'k' = \frac{\theta A'(\sqrt{h'q'} - \sqrt{k'q'})}{K'\sqrt{a}}$; da cui ſi trae, $T.hk : T.h'k' :: \frac{A(\sqrt{hq} - \sqrt{kq})}{K} : \frac{A'(\sqrt{h'q'} - \sqrt{k'q'})}{K}$. Così i tempi impiegati dalle ſuperficie delle acque a percorrere le altezze hk, $h'k'$ sono tra se come i prodotti delle baſi de' priſmi per le differenze delle radici quadrate delle altezze primitive, e delle altezze ultime delle acque nel ſerbatojo, diviſi per le aree degli orifizj.

Si farà quì, per rapporto agli effetti della contrazione della vena fluida, l'oſſervazione già fatta alla fine dell' articolo 97.

CA-

CAPO III.

Del moto dell' Aria.

110. Sia *ABCD* (Fig. 38) un cilindro chiuso da tutte le parti, contenente un' aria omogenea ed ugualmente densa in tutta la sua estensione. Quest' aria è in uno stato di compressione, e subito che le si permette qualche uscita, o le si facilita il mezzo di estendersi o di dilatarsi, si dilata di fatti, e la sua forza elastica diminuisce. In ciascuno stato di compressione la forza elastica è sempre uguale alla forza, che ha prodotto questa compressione (43). Così, per es., se l' aria *ABCD* è simile a quella che noi respiriamo, e per conseguenza sia stata compressa o dalla pressione stessa dell' atmosfera, o da una forza equivalente, ella sosterrà colla sua molla il peso d' una colonna d' acqua di 32 piedi di altezza; cioè riguardando il fondo superiore *AD* del cilindro come un coperchio liberamente mobile lungo le pareti, ed immaginando, che questo coperchio sia caricato in tutta la sua superficie d' una colonna d' acqua di 32 piedi di altezza, vi sarà equilibrio tra la forza elastica dell' aria, ed il peso della colonna d' acqua; ed il coperchio *AD* non potrà nè ascendere, nè discendere. Suppongo che

Fig. 38.

il calore dell' aria *ABCD* rimanga sempre lo stesso; poichè se esso viene ad aumentarsi o a diminuirsi, la forza elastica aumenta pure o diminuisce. Similmente supporrò in appresso che il grado di calore sia lo stesso per tutte le arie, di cui cercherò misurare e paragonare le forze elastiche.

111. L' esperienza fa vedere (46 e 47) che, se una stessa massa d' aria, che conserva sempre il medesimo grado di temperatura, è ridotta ad occupare successivamente differenti volumi, le forze, che la comprimono, e per conseguenza anche le sue differenti forze elastiche seguono la ragione inversa dei volumi, o la ragione diretta delle densità. Ora ridurre una stessa massa d' aria ad occupare differenti volumi è lo stesso che far entrare in un medesimo volume differenti quantità d' aria, le di cui densità sieno le stesse rispettivamente che quelle della massa proposta ne' suoi differenti stati. Concludiamo dunque da quest' esperienza che, se differenti masse d' aria occupano successivamente un medesimo volume, esse hanno forze elastiche, che lor sono proporzionali, o (ciò che torna lo stesso) sono proporzionali alle loro densità, poichè la densità non è altro che la quantità di materia compresa sotto un medesimo volume dato.

PRO-

PROPLEMA I.

112. *Determinare la velocità colla quale l'aria esce in ciascun istante del vaso* ABCD *per l'orifizio* C, *supponendo che scappi nel vuoto, o che non provi alcuna resistenza alla sua uscita.*

Sieno, pel primo istante del moto, P il peso, a cui la forza elastica dell' aria può fare equilibrio, Q la densità di questo fluido, V la sua velocità; e chiamiamo q la densità che ha al fine d'un certo tempo t, u la sua velocità alla fine di questo medesimo tempo. Inoltre chiamiamo M ed m le masse d'aria che escono in tempi uguali ne' due casi. Si vede, per l'articolo precedente, che la forza elastica dell' aria dopo il tempo t sarà $\frac{Pq}{Q}$; e siccome le forze motrici sono proporzionali alle quantità di moto, ch' esse producono ne' medesimi tempi, si avrà $P : \frac{Pq}{Q} :: MV : mu$. Ma le masse M ed m sono come i prodotti de' loro volumi per le loro densità, ed i loro volumi sono come i prodotti dell' orifizio per le velocità. Così l'orifizio essendo lo stesso ne' due casi, si avrà $M : m :: QV : qu$. Dunque $P : \frac{Pq}{Q} :: QVV : quu$. Dal che si deduce $u = V$. Così l'aria esce con-

continuamente colla ſteſſa velocità, che è la velocità iniziale V (*). co-

(*) Sia H l' altezza dovuta alla velocità coſtante V dell' aria al paſſaggio C, θ il tempo, che un corpo grave impiegherebbe a cadere dall' altezza a, C l' area dell' orifizio, A il volume del cilindro $ABCD$. Si troverà (come negli articoli 95 e 96) che nell' iſtante dt eſce un picciol volume d' aria eſpreſſo da $\frac{2Cdt\sqrt{aH}}{\theta}$; e per conseguenza una picciola maſſa eſpreſſa da $\frac{2Cqdt\sqrt{aH}}{\theta}$; giacchè l' iſtante dt ſi prende al fine del tempo t, in cui la denſità è q. Ma è altronde evidente che dopo il tempo t la maſſa d' aria uscita dal cilindro è $A.Q - A.q$. Dunque ſi avrà $\frac{2Cqdt\sqrt{aH}}{\theta} = d(A.Q - A.q)$, ovvero

$$dt = \frac{\theta A}{2C\sqrt{aH}} \times -\frac{dq}{q},$$

il di cui integrale (facendo $t = o$, quando $q = Q$) è

$$t = \frac{\theta A}{2C\sqrt{aH}} \times \log. \frac{Q}{q}.$$

Da queſta eſpreſſione del tempo ſi vede che il vaſo $ABCD$ non ſi vuoterà ſe non al fine d' un tempo infinito.

COROLLARIO.

113. Supponiamo che al primo iſtante l'aria contenuta nel vaſo ſia aria naturale, oſſia che il peſo P ſia uguale al peſo d' una colonna d' acqua di 32 piedi di altezza. Siccome l' aria è incirca 850 volte meno denſa dell' acqua, egli è evidente che l' uſcita dell' aria per l' orifizio C è la ſteſſa che ſe queſt' aria foſſe ſpinta dalla preſſione d' una colonna di aria di ſimile denſità uniforme, e di 850 volte 32 piedi di altezza, o di 27200 piedi di altezza. Così la velocità V è dovuta a queſta caduta. Ora un corpo grave, che cade da 15 piedi di altezza, acquiſta una velocità capace di fargli percorrere uniformemente 30 piedi in un ſecondo. Per conſeguenza ſi avrà la velocità V, per un ſecondo, facendo queſta proporzione $\sqrt{15} : \sqrt{27200} :: 30$ piedi : $V = 1277$ piedi. L' aria deve dunque percorrere, in virtù della ſua forza elaſtica nello ſtato ordinario dell' atmoſfera, in circa 1277 piedi in un ſecondo, correndo nel vuoto.

PROBLEMA II.

114. *Eſſendo ſtata condenſata in un vaſo* ABCD *dell' aria: ſi domanda la velocità, colla quale eſſa uſcirà dal piccolo orifizio* C, *ſupponendo che ſi ſparga in un' aria ambiente più rara di eſſa, e di una eſtenſione infinita, qual può ſempre attri-*

buirsi all' atmosfera, per rapporto al picciol vaso ABCD?

Chiamiamo D la densità dell' aria esteriore; F la sua forza elastica; Q la densità iniziale dell' aria interiore, o dell' aria contenuta nel vaso, e per conseguenza $\frac{QF}{D}$ la sua forza elastica iniziale; q la densità dell' aria interiore dopo un certo tempo t, e per conseguenza $\frac{qF}{D}$ la sua forza elastica corrispondente; M la picciola massa iniziale d' aria, che esce dall' orifizio; V la sua velocità; m la picciola massa d' aria, che esce dopo il tempo t; u la sua velocità. Opponendo costantemente l' aria esteriore all' uscita dell' aria interiore la resistenza F, egli è evidente che la forza espulsiva iniziale dell' aria interiore è $\frac{QF}{D} - F$, ossia $\frac{(Q-D)F}{D}$, e che la forza espulsiva, dopo il tempo t, è $\frac{(q-D)F}{D}$. Ora le forze espulsive sono come le quantità di moto ch' esse producono nel medesimo tempo; così si ha $\frac{(Q-D)F}{D} : \frac{(q-D)F}{D} :: MV : mu$. Ma le masse M ed m sono come i prodotti delle loro densità per i loro volumi, e questi volumi sono come i prodotti dell' orifizio per le velocità; dunque $\frac{(Q-D)F}{D} : \frac{(q-D)F}{D} :: QV^2 : qu^2$;

ciò

ciò che dà $u = V \times \sqrt{\frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}}$.

Si vede che ne verià $u = o$, ossia che l'aria cesserà di scorrere, quando si avrà $q = D$. Non occorre di far osservare che se si avesse $D = Q$, non vi sarebbe alcun moto, poichè allora essendo nulla la forza espulsiva iniziale $\frac{(Q-D)F}{D}$, sarebbe pur nulla la velocità iniziale V (*).

H 4 co-

(*) I. Sia H l'altezza dovuta alla velocità V, e riteniamo tutte le alte denominazioni. Egli è evidente che l'altezza dovuta alla velocità u sta ad $H : : u^2 : V^2$, ossia, per essere $u = V \times \sqrt{\frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}}$, $: : V^2 \times \frac{Q(q-D)}{q(Q-D)} : V^2 : : \frac{Q(q-D)}{q(Q-D)} : 1$; quindi sarà essa $= H \times \frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}$. Così la picciola massa d'aria, che esce nell' istante dt è (96) $\frac{2Cqdt}{\delta} \times \sqrt{\left(\frac{aHQ(q-D)}{q(Q-D)}\right)}$. Ma questa massa ha

per

COROLLARIO.

115. Supponiamo, per es., $Q = 10D$; $q = 9D$; e che la pressione dell' atmosfera, o la forza elastica F sia equivalente al peso d' una colonna d' acqua di 32 piedi di altezza. La forza espulsiva iniziale $\frac{(Q-D)F}{D}$ dell' aria equivarrà al peso d' una colonna d' acqua di 9×32 piedi, o di 288 piedi di altezza: e siccome l' aria, che questa forza fa uscire dall' orifizio, è 85 volte meno densa dell' acqua, ne segue

---

per altra espressione (come nella nota precedente) $d(A.Q - A.q)$. Così si avrà

$$dt = \frac{\theta A \sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}} \times \frac{-dq}{\sqrt{(qq - Dq)}},$$

il di cui integrale, facendo $t = o$, allorchè $q = Q$, è

$$t = \frac{\theta A \sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}} \times \log\left(\frac{Q - \frac{1}{2}D + \sqrt{(Q^2 - DQ)}}{q - \frac{1}{2}D + \sqrt{(qq - Dq)}}\right).$$

II. Abbiamo veduto che l' aria cessa di scorrere allorchè $q = D$. Facendo dunque $q = D$ nell' espressione del tempo, si avrà

$$t = \frac{\theta A \sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}} \times \log\left(\frac{Q - \frac{1}{2}D + \sqrt{(Q^2 - DQ)}}{\frac{1}{2}D}\right)$$

per la durata dello scorrimento.

segue che l' efflusso iniziale è lo stesso che se l'aria fosse allora cacciata dalla pressione d' una colonna d' aria, tutta della medesima densità di essa, e di 85 volte 288 piedi, ossia di 24480 piedi di altezza; e che per conseguenza la velocità V è dovuta a questa altezza medesima. Dunque la velocità V, per un secondo, sarà di 30 piedi $\times \frac{\sqrt{24480}}{\sqrt{15}}$, e la velocità u, pure per un secondo, sarà di 30 piedi $\times \frac{\sqrt{24480}}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{81}}$. Così si avrà appresso a poco, $V = 1212$ piedi, $u = 1204$ piedi.

Di quì si può avere un' idea della velocità, colla quale una palla è cacciata da que' fucili, che chiamansi *archibugi a vento*, e la di cui descrizione si trova in tutti i libri di fisica.

PROBLEMA III.

116. *Supposto che il vaso* ABCD *contenga un' aria più rara di quella dell' atmosfera: si domanda la velocità, colla quale quest' ultima entrerà nel vaso pel picciolo orifizio* C?

Chiamando D la densità costante dell' aria esteriore; F la sua forza elastica; Q la densità iniziale dell' aria contenuta nel cilindro, e per conseguenza $\frac{QF}{D}$ la sua forza elastica iniziale;

q la denſità di queſt' aria dopo il tempo t, e però $\frac{qF}{D}$ la ſua forza elaſtica dopo queſto medeſimo tempo; V la velocità iniziale colla quale l'aria eſteriore entra nel cilindro; u la ſua velocità dopo il tempo t: ſi vede che la forza impulſiva iniziale dell' aria per entrare nel cilindro è $F - \frac{QF}{D}$ oſſia $\frac{(D-Q)F}{D}$, e che dopo il tempo t, la forza impulſiva è $\frac{(D-q)F}{D}$. Si avrà dunque $\frac{(D-Q)F}{D} : \frac{(D-q)F}{D} :: DV^2 : Du^2$; e per conſeguenza $u = V \times \sqrt{\frac{D-q}{D-Q}}$ (*).

co-

(*) I. Ritenganſi le denominazioni date nel Problema; ed inoltre chiamiſi H l'altezza dovuta alla velocità V: ſi vede, come nelle note precedenti, che l'altezza dovuta alla velocità u è $= H \times \frac{D-q}{D-Q}$; e quindi la picciola maſſa d'aria, che entra nel cilindro nell' iſtante dt, ſarà $= \frac{2CDdt}{\theta} \times \sqrt{\frac{aH(D-q)}{D-Q}}$; ma eſſa è altronde $= d(A.q - A.Q)$; dunque ſi avrà

dt

COROLLARIO.

117. Se al primo iſtante il cilindro foſſe vuoto, ſi avrebbe $Q = o$; ed allora $u = V \times \sqrt{\frac{D-q}{D}}$. Si vede nell' uno, e nell'altro caſo, che l'aria ceſſa d'entrare nel cilindro quando $q = D$, oſſia quando la denſità dell' aria è la ſteſſa così di dentro come di fuori (*).

PRO-

$$dt = \frac{\theta A \sqrt{(D-Q)}}{2CD\sqrt{aH}} \times \frac{dq}{\sqrt{(D-q)}}$$

il di cui integrale, fatto ſempre $t = o$ quando $q = Q$, è

$$t = \frac{\theta A \sqrt{(D-Q)}}{CD\sqrt{aH}} \times \left(\sqrt{(D-Q)} - \sqrt{(D-q)}\right).$$

II. Il moto ceſſa allorchè $q = D$; e per conſeguenza la ſua durata è

$$t = \frac{\theta A (D-Q)}{CD\sqrt{aH}}$$

(*) I. Chiamando H l' altezza dovuta alla velocità V, e ritenendo le altre denominazioni, la picciola maſſa d' aria, che entra nel cilindro $ABCD$ nell' iſtante dt, è eſpreſſa da

2 C

PROBLEMA IV.

118. *Contenendo i due cilindri* ABCD, FGHG Fig. 39. (Fig. 39), *chiusi da tutte le parti, delle arie differentemente condensate: si domanda la velocità, colla quale l'aria passerà da un cilindro nell'altro; pel picciolo orifizio* C?

Egli

$\frac{2CDdt}{\theta} \times \sqrt{\left(\frac{aH(D-q)}{D}\right)}$, per essere

$\frac{H(D-q)}{D}$ l'altezza dovuta alla velocità u;

e siccome ella ha $d(A.q)$ per secondo valore, si avrà

$$dt = \frac{\theta A}{2C\sqrt{aHD}} \times \frac{dq}{\sqrt{(D-q)}},$$

il di cui integrale preso in modo che $q = o$ dia $t = o$, è

$$t = \frac{\theta A}{C\sqrt{aHD}} \times \left(\sqrt{D} - \sqrt{(D-q)}\right).$$

II. Il moto cessa allorquando $q = D$. Così la durata totale di questo moto è data dalla formola

$$t = \frac{\theta A}{C\sqrt{aH}}.$$

Egli è immediatamente evidente che l'aria più densa scorrerà nella più rara. Supponiamo, che questo scorrimento si faccia dal vaso $ABCD$ nel vaso $FCHG$. Chiamiamo D la densità dell' aria dell'atmosfera; F la sua forza elastica; Q la densità iniziale dell' aria $ABCD$, e per conseguenza $\frac{QF}{D}$. la sua forza elastica iniziale; q la sua densità dopo il tempo t, e conseguentemente $\frac{qF}{D}$ la sua forza elastica dopo questo medesimo tempo: R la densità iniziale dell' aria $FCHG$, e perciò $\frac{RF}{D}$ la sua forza elastica iniziale; r la sua densità dopo il tempo t, e per conseguenza $\frac{rF}{D}$ la sua forza elastica dopo questo medesimo tempo; V la velocità iniziale dell' aria $ABCD$; u la sua velocità dopo il tempo t. Egli è chiaro che la forza espulsiva dell' aria $ABCD$ è $\frac{QF}{D} - \frac{RF}{D}$ al primo istante; e $\frac{qF}{D} - \frac{rF}{D}$ dopo il tempo t. Così si avrà $\frac{QF - RF}{D}$: $\frac{qF - rF}{D}$ :: $QVV : quu$; ciò che dà $u = V \times \sqrt{\frac{Q(q - r)}{q(Q - R)}}$. Quando si avrà $r = q$, allora lo scorrimento dell' aria cesserà.

Sic-

Siccome la massa totale dell' aria rinchiusa ne' due cilindri rimane costantemente la stessa, se si chiama A la capacità o il volume del cilindro $ABCD$, B quello del cilindro $FCHG$, si avrà questa seconda equazione $A.Q + B.R = A.q + B.r$, poichè le masse sono come i prodotti dei volumi per le densità. Quest' equazione dà $r = \frac{A(Q-q)+B.R}{B}$. Sostituendo questo valore di r nel valore di u, si avrà $u = V \times \sqrt{\frac{Q[B(q-R)-A(Q-q)]}{Bq(Q-R)}}$: equazione, che dà la velocità u corrispondente a ciascuna densità q (*).

CA-

(*) I. Chiamando, al solito, H l' altezza dovuta alla velocità V, si deduce dalla formola

$$u = V \times \sqrt{\frac{Q[B(q-R)-A(Q-q)]}{Bq(Q-R)}},$$

che l'altezza dovuta alla velocità u è $=$

$$\frac{H.Q[B(q-R)-A(Q-q)]}{Bq(Q-R)} =$$

$$\frac{H[Qq(B+A)-Q(BR+AQ)]}{Bq(Q-R)}$$

e prendendo, per accorciare un poco il calcolo

lo, $Q(B+A)=M$; $Q(B.R+QA)$ $=N$; $B(Q-R)=D$, si ridurrà ad

$$\frac{H(Mq-N)}{Dq}$$

Così la picciola massa d'aria, che nell'istante dt passa dal cilindro $ABCD$ nell'altro, sarà

$$\frac{2Cqdt}{\theta}\sqrt{\left(\frac{aH(Mq-N)}{Dq}\right)},$$

e dovendo pure la stessa essere $=d(A.Q-A.q)$ si avrà

$$\frac{2Cqdt}{\theta}\sqrt{\left(\frac{aH(Mq-N)}{Dq}\right)}=d(A.Q-A.q),$$

che, fatto $\frac{N}{M}=m$, dà

$$dt=\frac{\theta A\sqrt{D}}{2C\sqrt{aHM}}\times\frac{-dq}{\sqrt{(qq-mq)}};$$

il di cui integrale, compito in modo che $q=Q$ renda $t=o$, è

$$t=\frac{\theta A\sqrt{D}}{2C\sqrt{aHM}}\times\log.\left(\frac{Q-\frac{1}{2}m+\sqrt{(Q^2-mQ)}}{q-\frac{1}{2}m+\sqrt{(q^2-mq)}}\right).$$

11. Il moto cessa allorquando $r=q$; e siccome si ha sempre $A.Q+B.R=A.q+B.r$, si

ſi avrà allora $q = \frac{A.Q + B.R}{A + B}$. Rappresentiamo queſta quantità colla ſemplice lettera G, e ſoſtituviamola nell' espreſſione del tempo; troveremo

$$t = \frac{6A\sqrt{D}}{2C\sqrt{aHM}} \times \log.\left(\frac{Q - \frac{1}{2}m + \sqrt{(Q^2 - mQ)}}{G - \frac{1}{2}m + \sqrt{(G^2 - mG)}}\right):$$

per la durata del moto, di cui ſi tratta.

CAPO IV.

Della percussione de' Fluidi.

119. Allorchè un fluido in moto incontra un corpo o un ostacolo posto sul suo cammino, esso necessariamente urta questo corpo, quest' ostacolo, con una certa forza; poichè le particelle fluide sono elleno stesse piccioli corpi, che moltiplicate per la loro velocità compongono una quantità determinata di moto. Se in vece di supporre il fluido in moto, si suppone in quiete, ma che un corpo venga ad urtarlo con una certa velocità; la *resistenza*, che il fluido opporrà al corpo proposto, sarà uguale alla *percussione*, che il fluido mosso colla velocità del corpo eserciterebbe contro questo medesimo corpo, supposto in quiete. Ciò è per se stesso evidente. La percussione, e la resistenza de' fluidi seguono dunque le stesse leggi, e si misurano nello stesso modo.

120. Si distinguono in generale due sorti di forze; le forze *morte* e le forze *vive*. Le prime sono semplici pressioni, che non producono alcuna velocità attuale e finita, e che non ne produrrebbero che dopo aver agito per un tempo finito: le altre, che chiamansi ordinariamente forze di percussione, producono una ve-

 lo-

locità finita ed attuale, e possono riguardarsi come somme di pressioni accumulate. Egli è evidente che qualunque forza di pressione può contrabbilanciarsi o misurarsi con un peso; poichè un peso non è altro che una massa sottoposta all' azione della gravità, che è ella stessa una forza di pressione. Quanto alle forze di percussione, se si suppone ch' esse producano il loro effetto in un istante indivisibile, esse saranno infinite per rapporto alle forze di pressione, e non potranno per conseguenza misurarsi con alcun peso. Ma non si concepisce come la forza d' un corpo in moto, che è una quantità finita, possa in un istante indivisibile produrre un effetto finito, cioè imprimere una quantità determinata di moto in un altro corpo. Tutta la comunicazione del moto si fa in un tempo finito, comunque esso possa essere d'una brevità tale che ci sfugga. Possiamo dunque in generale riguardare le forze di percussione come operanti per gradi, nello stesso modo che le forze di pressione, e come producenti il loro effetto in un tempo finito estremamente corto, o come infinitamente piccolo. Allora esse potranno misurarsi con de' pesi; Imperciocchè la gravità applicata, per un tempo finito, ad un corpo, produce una forza viva, capace per conseguenza di fare equilibrio ad un' altra forza parimente viva. Si vede perciò che quando un fluido urta un corpo, l'urto ch' esso esercita

in

in tal modo è sempre riducibile ad un certo peso.

121. Egli è assai difficile di determinare le leggi della percussione de' fluidi, in un modo esatto, ed applicabile alla pratica. Non si è peranco potuto trovare intorno a ciò una teoria, che soddisfaccia perfettamente. In quella, che ordinariamente si segue, e che ha il vantaggio d'essere molto semplice, si suppone che il fluido sia composto in ciascun istante, nella direzione del suo moto d'una infinità di filetti paralleli, che danno ciascuno il loro colpo, senza impedirsi l'un l'altro; ciò che non può rigorosamente aver luogo, e ciò che conduce in alcuni casi a risultati troppo lontani dal vero per essere ammissibili. Ciò non pertanto due motivi mi obbligano a qui esporre questa teoria, malgrado le sue imperfezioni; l'uno è di facilitare a' miei Leggitori l'intelligenza di diverse opere sopra l'architettura navale, alle quali essa serve di fondamento; l'altro è ch'essa può adoperarsi, senza temere errore notabile, siccome me ne sono assicurato coll'esperienza, nel calcolo delle macchine, mosse per mezzo di ruote da correnti d'acqua, e generalmente in tutti i casi, dove l'angolo d'obliquità dell'urto non è troppo piccolo, voglio dire allorchè non va molto al di sotto di 60 gradi.

TEOREMA I.

Fig. 40. 122. *Se un medesimo fluido* MXZN (Fig. 40), *le di cui particelle si muovono tutte colla stessa velocità, urta perpendicolarmente i due piani* AB, AR: *le forze degli urti sono tra se come questi piani.*

Imperciocchè, supposto che tutte le molecole fluide si muovano secondo le direzioni *IK*, *OR*, ec. perpendicolari ai due piani proposti, l'impulso contro il piano *AB* sta all'impulso contro il piano *AR*, come il prodotto del numero delle molecole, che urtano *AB* per la loro velocità sta al prodotto del numero delle molecole, che urtano *AR*, per la loro velocità. Ora le masse, che urtano in tempi uguali i piani *AB*, *AR* sono prismi, che hanno per basi questi piani medesimi, e per altezza comune la velocità del fluido. Dunque il rapporto dell'impulso contro il piano *AB*, all'impulso contro il piano *AR*, è evidentemente lo stesso che il rapporto del piano *AB* al piano *AR*.

TEOREMA II.

123. *Se due fluidi della stessa specie* MXZN, Fig. 40. 41. EGHF (Fig. 40 e 41), *mossi con differenti velocità, urtano perpendicolarmente i due piani* AB, CD *in quiete: le forze degli urti saranno tra se come i prodotti de' piani pei quadrati delle velocità de' fluidi.*

Chia-

Chiamiamo	l'impulso contro AB . . . . . F
	l'impulso contro CD . . . . . f
	la massa fluida, che urta AB . M
	la velocità di questo fluido . V
	la massa fluida, che urta CD . m
	la velocità di questo fluido . u .

Si avrà $F : f :: MU : mu$. Ora poichè i fluidi sono della medesima specie, le masse M ed m sono tra se come i loro volumi, ed i loro volumi sono tra se come i prodotti dei piani AB, CD, che loro servono di base, moltiplicati per le velocità de' fluidi, che ne rappresentano le altezze. Così si avrà $M : m :: AB \times V : CD \times u$; ed $MV : mu :: AB \times V^2 : CD \times u^2$. Dunque anche $F : f :: AB \times V^2 : CD \times u^2$.

SCOLIO.

124. Se i fluidi non fossero della stessa specie, la ragione delle densità dovrebbe entrare nella ragione delle masse, che urtano nel medesimo tempo i piani AB, CD. Allora *gli urti sarebbero in ragione composta dei piani, delle densità dei fluidi, e dei quadrati delle velocità dei fluidi medesimi*. Non bisogna perder di vista questa osservazione, allorquando si tratta di paragonare l'urto d'un fluido con quello d'un altro fluido di densità differente. Per esempio, sotto la medesima estensione della superficie urtata, e sotto la stessa velocità de' due fluidi, la percus-

ſione dell' acqua è a quella dell' aria come 850 a 1, cioè nel rapporto delle denſità di queſti due fluidi.

In ſeguito ſupporrò ſempre, per brevità, eſſere i fluidi della medeſima ſpecie, oſſia ch' eſſi abbiano la medeſima denſità.

TEOREMA III.

125. *Se andando i due fluidi* MXZN, EGHF *di continuo ad urtare perpendicolarmente i due piani* AB, CD, *colle velocità* V *ed* u, *queſti piani hanno nel momento dell' urto parallelamente a ſe ſteſſi nella direzione del moto de' fluidi, le velocità* v *ed* u': *le forze degli urti ſaranno tra ſe come i prodotti dei piani per i quadrati delle differenze, o delle ſomme delle velocità dei fluidi e dei piani.*

Imperciocchè ſieno VT la velocità del primo fluido, e KT la velocità del piano AB; LQ la velocità del ſecondo fluido, e PQ la velocità del piano CD: egli è evidente che gli urti ſono i medeſimi che ſe i piani foſſero in quiete, e i fluidi, in vece di moverſi colle velocità VT, LQ, ſi moveſſero ſemplicemente colle velocità VK, LP, poichè i piani ſi ſottraggono dagli urti colle velocità KT, PQ. Dunque, chiamando F ed f gl' impulſi de' due fluidi, ſi avrà $F : f :: AB \times (V - v)^2 : CD \times (u - u')^2$.

Si vede parimente che, ſe i piani, in vece di

di sfuggire direttamente i fluidi, venissero loro incontro, colle velocità v ed u', si avrebbe $F : f :: AB \times (V + v)^2 : CD \times (u + u')^2$. Così riunendo i due casi, si avrà $F : f :: AB \times (V \mp v)^2 : CD \times (u \mp u')^2$.

COROLLARIO

126. Se l'uno de' piani, per es., AB è in quiete, allora $v = o$, e si ha $F : f :: AB \times V^2 : CD \times (u \mp u')^2$, proporzione, che serve a paragonar la percussione perpendicolare d'un fluido contro un piano in quiete alla percussione perpendicolare contro un piano mobile.

TEOREMA IV.

127. *Se il fluido* MXZN (Fig. 40) *urta perpendicolarmente il piano* AB *in quiete, e il fluido* EGHF (Fig. 42) *urta obliquamente il piano* CD *parimente in quiete: l'impulso contro il piano* AB *starà all'impulso, che risulta perpendicolarmente contro il piano* CD, *come il prodotto del piano* AB *per il quadrato della velocità del fluido* MXZN, *e per il quadrato del seno tutto sta al prodotto del piano* CD *per il quadrato della velocità del fluido* EGHF, *e per il quadrato del seno dell'angolo* RCD *d'incidenza del fluido* EGHF *sopra il piano* CD.

Fig. 40. e 42.

Chiamiamo
- l' impulso contro Ab . . . F
- l' impulso, che risulta perpendicolarmente contro CD . . f
- la velocità del fluido $MXZN$. V
- la velocità del fluido $EGHF$. u
- la massa, che urta AB . . M
- la massa, che urta CD . . m
- la sua velocità perpendicolare a CD . . . . u'
- il seno tutto . . . . . R
- il seno dell' angolo d' incidenza RCD . . . . p.

si avrà immediatamente $F : f :: MV : mu'$. Ora guidando DR perpendicolare a CR, o alla direzione del fluido, egli è evidente che il numero delle molecole, che urtano DC, è lo stesso che il numero delle molecole, che urtano DR. Così i prismi fluidi, che urtano in tempi uguali i piani AB, CD, sono tra se come le loro basi AB, DR, moltiplicate per le velocità de' fluidi, che ne sono le altezze. Si ha dunque $M : m ::$ $AB \times V : DR \times u$; ossia (osservando che DR $= CD \times \frac{p}{R}$) $M : m :: AB \times V : CD \times \frac{p}{R} \times u$ $:: AB \times V \times R : CD \times u \times p$. Inoltre, se sulla direzione d' un filetto qualunque xn del fluido $EGHF$, si prende la parte ny per rappresentare la velocità di questo fluido, e si fa il parallelogrammo rettangolo $ntyr$, di cui il lato nt sia

per-

perpendicolare, ed il lato nr parallelo a DC: egli è evidente che delle due velocità nt, nr, nelle quali la velocità ny si decompone, la sola prima è quella, che contribuisce all' urto perpendicolare contro DC, e che non si deve punto riguardare la seconda. Paragonando la velocità nt, ossia u' alla velocità u del fluido $EGHF$, si avrà $u' : u :: ry : ny :: p : R$, e per conseguenza $u' = u \times \frac{p}{R}$. Si avrà dunque $MV : mu' :: AB \times V^2 \times R : \frac{CD \times u^2 \times p^2}{R} :: AB \times V^2 \times R^2 : CD \times u^2 \times p^2$. Dunque finalmente, $F : f :: AB \times V^2 \times R^2 : CD \times u^2 \times p^2$.

Questa proporzione servirà a paragonare la percussione obliqua alla percussione perpendicolare, essendo in quiete i due piani urtati nell' istante delle percosse.

COROLLARIO I.

128. Quando le velocità V ed u sono uguali, si ha semplicemente $F : f :: AB \times R^2 : CD \times p^2$, proporzione, che servirà a paragonar l' impulso perpendicolare d' un fluido contro un piano all' impulso del medesimo fluido o d' un fluido simile, mosso colla medesima velocità contro un altro piano urtato obliquamente.

COROLLARIO II.

129. Ne segue pure di quì il modo di pa-

paragonare tra se le percussioni perpendicolari, che provengono da percussioni oblique, sempre essendo in quiete i piani urtati; imperciocchè, se ritenute le altre denominazioni dell' articolo 127, si chiama A la superficie del piano AB, B quella del piano CD; e in seguito si suppone un terzo piano C, che sia urtato obliquamente da un terzo fluido mosso colla velocità v, e si chiama φ la forza, che risulta perpendicolarmente contro questo medesimo piano, q il seno dell' angolo, sotto il quale esso è urtato; si avranno queste due proporzioni

$$F:f::A\times V^2\times R^2:B\times u^2\times p^2;$$
$$\varphi:F::C\times v^2\times q^2:A\times V^2\times R^2,$$

le quali moltiplicate per ordine danno $\varphi:f::C\times v^2\times q^2:B\times u^2\times p^2$. Dal che si vede che *le forze φ ed f, che risultano perpendicolarmente contro i due piani C e B, sono tra se in ragione composta dei piani, dei quadrati delle velocità de' fluidi, e dei quadrati de' seni degli angoli d' incidenza.*

COROLLARIO III.

Fig. 43. e 44.

130. Sieno (Fig. 43 e 44) due fluidi $MXZN$, $EGHF$, che vanno ad urtare obliquamente i due piani AB, CD, i quali si muovono parallelamente a se stessi, colle velocità Aa, Cc. Rappresentiamo le velocità de' due fluidi colle rette IT, LQ; indi decomponiamo la velocità IT in due altre IO, IP, di cui l' una IO sia la stessa che quella del piano AB;

e

e la velocità *LQ* in due altre *LS*, *LK*, di cui l' una *LS* sia la stessa che quella del piano *CD*. Le due velocità *IP*, *LK*, e gli angoli *PIA*, *KLC*, ch' esse formano coi piani *AB*, *CD*, sono quantità, che possono determinarsi colle regole di Trigonometria, poichè, ne' due parallelogrammi *IPTO*, *LKQS*, si conoscono le diagonali *IT*, *LQ*, i lati *IO*, *LS*, gli angoli *OIT*, *SLQ*, ed inoltre gli angoli *TIA*, *QLC*. Ora egli è chiaro che i fluidi non agiscono sui piani, se non se in virtù delle velocità *IP*, *LK*, poichè questi piani, per le loro velocità proprie, si sottraggono totalmente dall' effetto delle velocità *IO*, *LS*. Così i due urti saranno assolutamente i medesimi che se, essendo i piani supposti in quiete, i fluidi venissero ad urtarli colle velocità *IP*, *LQ*. Dunque se si chiamano f ed f' le forze, che risultano perpendicolarmente ai piani *AB*, *CD*, in virtù di questi urti; p il seno dell' angolo *PIA*; q il seno dell' angolo *KLC*: si avrà, per l' articolo precedente, $f' : f :: AB \times (IP)^2 \times p^2 : CD \times (LK)^2 \times q^2$.

SCOLIO.

131. Avendo così insegnato a paragonare insieme le differenti specie di percussione de' fluidi, basterà conoscere la misura assoluta di una di esse per concluderne quella di tutte le altre. Ora secondo l' esperienza, *la percussione perpendicolare e diretta d' un fluido indefinito contro un piano*

piano in quiete è uguale sensibilmente al peso d' una colonna di questo fluido, la quale avesse per base la superficie urtata, e per altezza l' altezza dovuta alla velocità, colla quale si fa la percussione; di modo che, se si chiama P questa percussione, s^2 la superficie del piano urtato, h l'altezza dovuta alla velocità del fluido, p la gravità specifica di questo fluido medesimo, si ha a un di presso $P = ps^2h$. Il valore di h può sempre determinarsi, come lo insegna la Meccanica.

Supponiamo per es., che la superficie s^2 sia un piede quadrato, e che il fluido sia d' acqua dolce, il di cui piede cubico pesa 70 libbre in circa; che nel caso presente, quest' acqua vada ad urtare il piano, con una velocità uniforme di 1 piede per secondo: si troverà che la percussione P è equivalente ad un peso di circa 19 oncie.

La percussione de' fluidi, che movonsi in canali stretti contro de' piani, che occupano quasi tutta la larghezza de' medesimi, è più considerabile. Vedete sopra tutta questa materia l' opera, che ha per titolo: *Nouvelles Experiences sur la Résistance des Fluides*, che il Sig. d' ALEMBERT, il Marchese di CONDORCET, ed io pubblicammo nel 1777.

Facciamo qualche applicazione generale della teoria precedente.

PRO-

PROBLEMA I.

132. *Sia un triangolo isosceleACB* (Fig. 45) *in quiete, ed esposto all' urto d' un fluido, la di cui direzione è perpendicolare alla sua base* AB: *si domanda il rapporto dell' impulso, che riceverà questo triangolo parallelamente alla sua altezza* CD, *all' impulso diretto e perpendicolare, che riceverebbe la sua base* AB?

Fig. 45.

Chiamando F l' impulso diretto contro AD, ovvero DB; f l' impulso, che risulta perpendicolarmente contro AC, ovvero CB, si avrà (127) $F:f::AD \times (\text{sen. tutt.})^2 : AC \times (\text{sen.} ACD)^2 :: AD \times (AC)^2 : AC \times (AD)^2 :: AC : AD$. Dunque $f = \frac{F \times AD}{AC}$. Consideriamo ora che gl' impulsi sopra AC e sopra CB in parte si distruggono; imperciocchè, se si prendono due filetti corrispondenti OR, or, e rappresentando gl' impulsi perpendicolari ai punti R ed r colle rette RF, rf uguali e perpendicolari ai lati AC, CB del triangolo, si formano i parallelogrammi rettangoli $ERHF$, $erhf$, i di cui lati RH, rh sieno paralleli ad AB, ed i lati RE, re paralleli a CD; egli è chiaro che delle quattro forze RH, RE, rh, re, nelle quali le forze RF, rf si decompongono, le due RH, rh si distruggeranno scambievolmente, e solo resteranno le due forze RE, re, per spignere il triangolo parallelamente a CD. Inoltre se si chiama φ la

forza

forza RE ovvero re, si avrà $f : \dot{\varphi} :: RF : RE :: AC : AD$, e per conseguenza $\varphi = \frac{f \times AD}{AC}$.
Sostituendo ad f il suo valore $\frac{F \times AD}{AC}$, si avrà $\varphi = \frac{F \times (AD)^2}{(AC)^2}$. Dunque $\varphi : F :: (AD)^2 : (AC)^2$; e $2\varphi : 2F :: (AD)^2 : (AC)^2$, proporzione, che ci fa vedere che *l' impulso ricevuto dal triangolo parallelamente alla sua altezza sta all' impulso diretto, che riceverebbe la sua base, come il quadrato della semibase sta al quadrato d' uno dei lati*. Conoscendo dunque la seconda di queste forze, si conoscerà anche la prima.

COROLLARIO I.

133. Dunque allorchè il triangolo isoscele ACB è rettangolo, l' impulso, ch' egli riceve parallelamente alla sua altezza, non è che la metà dell' impulso diretto che riceverebbe la sua base. Imperciocchè allora il triangolo rettangolo ADC è isoscele, e si ha $(AD)^2 : (AC)^2 :: 1 : 2$.

COROLLARIO II.

134. Ne segue pure di quì che, se si ha un quadrato $ACBM$ (Fig. 46), il quale sia urtato primieramente nella direzione della sua diagonale CM, indi perpendicolarmente ad uno de' suoi lati AC: il primo impulso starà al secondo, come 1 a $\sqrt{2}$, ossia come 7 a 10 in circa.

circa. Poichè nel primo caso, il solo triangolo *ACB* è quello che riceve l' urto, e l'altra metà *AMB* del quadrato non è punto urtata: e nel secondo, non v' è di urtato, che il solo lato *AC*. Dunque, chiamando *M* il primo impulso, *A* il secondo, ed inoltre *B* l' impulso perpendicolare, che riceverebbe *AB*., si avranno queste due proporzioni.

$$M : B :: 1 : 2, \ (132)$$
$$B : A :: AB : AC :: \sqrt{2} : 1 \ (122),$$

le quali moltiplicate per ordine danno
$M : A :: \sqrt{2} : 2 :: 1 : \sqrt{2}$.

PROBLEMA II.

135. *Essendo la semicirconferenza* AQB (Fig. 47) *urtata da un fluido, la di cui direzione è perpendicolare al diametro* AB *o parallela al raggio* QC: *si domanda il rapporto dell' impulso, che riceverà questa semicirconferenza parallelamente a* QC, *all' impulso diretto e perpendicolare, che riceverebbe il diametro* AB? Fig. 47.

Divisa la semicirconferenza *AQB* in una infinità di elementi *Ff*, *Ll*, ec. colle rette *FL*, *fl* parallele al diametro *AB*; e condotte le ordinate *FS*, *fs*, *LT*, *lt*, ec.: se si chiama *F* l' urto diretto, che riceverebbe *FR* ovvero *Ss*, φ l' urto, che riceve *Ff* parallelamente a *QC*, si avrà (131) $\varphi = \frac{F \times (FR)^2}{(Ff)^2}$. Sia condotto il raggio *CF*: i triangoli simili *FRf*, *FSC* daranno

FR

$FR : Ff :: FS : CF$, e per confeguenza $\frac{(FR)^2}{(Ff)^2} = \frac{(FS)^2}{(CF)^2}$. Dunque $\varphi = \frac{F \times (FS)^2}{(CF)^2}$. Così, per avere l'impufo totale, che riceve la femicirconferenza parallelamente a QC, folo ci rimane a trovare la fomma di tutte le quantità $\frac{F \times (FS)^2}{(CF)^2}$ offia $\frac{Ss \times (FS)^2}{(CF)^2}$, rapprefentandofi l'impulfo diretto contro FR, o Ss con quefta fteffa linea. Ora fe fi fa girare la femicirconferenza ABQ intorno al diametro AB, effa produrrà una sfera, la quale avrà per elemento $\frac{n}{1} \times (FS)^2 \times Ss$, effendo $\frac{n}{1}$ il rapporto della circonferenza al diametro. Per conseguenza l'impulso totale ricercato fta al folido della sfera nel rapporto coftante di $\frac{1}{(CF)^2}$ ad $\frac{n}{1}$. Ma il folido della sfera è $= n \times (CF)^2 \times \frac{2}{3} AB$; dunque l'impulso cercato $= \frac{2}{3} AB$; cioè rapprefentandofi l'impulso diretto contro AB con quefta fteffa linea AB; l'impulso, che riceve la femicirconferenza parallelamente a QC, viene rappresentato dai due terzi di AB. Quefti due impulfi ftanno dunque tra di loro nel rapporto di 3 a 2; ed effendo cognito uno, lo farà parimente l'altro.

Se-

Secondo questa teoria, l'impulso ricevuto dá un cilindro verticale, posto in mezzo d'un fiume, è due terzi di quello, che riceverebbe il parallelepipedo rettangolo circoscritto allo stesso cilindro, ed esposto per una delle sue faccie all' urto perpendicolare del fluido. Imperciocchè il semicilindro anteriore, e la faccia corrispondente del patallelepipedo circoscritto; sono le sole parti, che ricevono l'urto del fluido; ed esse ne difendono le parti rimanenti.

SCOLIO.

136. La soluzione del primo di questi Problemi si accorderà sufficientemente coll'esperienza, purchè l'angolo *ORC*, ovvero *ACD* d'incidenza del fluido sopra ciascuna delle due faccie del triangolo, sia un poco grande, come di 60 in 90 gradi. Ma per gli angoli, che fossero sensibilmente minori di 60 gradi, la teoria non s'accorda più coll'esperienza. Allora la percussione non diminuisce più tanto secondo l'esperienza, come dovrebbe diminuire secondo la teoria.

Ho dato il secondo Problema solo per insegnare con un esempio il modo di applicare la teoria alla superficie curve. Imperciocchè quì pure l'esperienza discorda dalla teoria, ma però in altro senso. Diffatti, la percussione contro la semicirconferenza *AQB*, che secondo

la teoria è i due terzi della percussione contro il diametro AB, non è che poco più della metà, secondo l'esperienza.

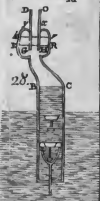
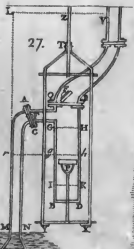
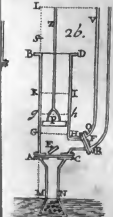
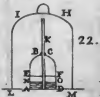
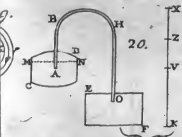
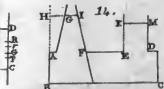
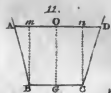
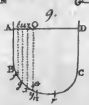
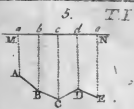
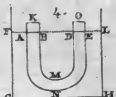
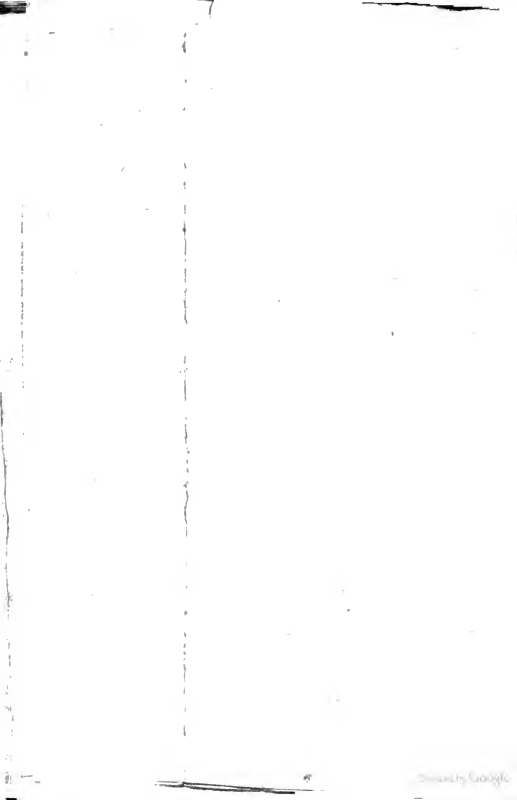
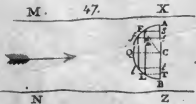
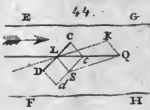
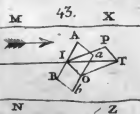
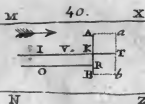
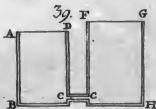
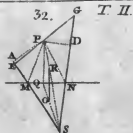
Niuno per' anco ha potuto arrivare a risolvere generalmente, in un modo esatto, ed applicabile alla pratica, il Problema della percussione de' fluidi. Una tale soluzione, se si troverà, sarà l'opra del tempo, dell'esperienza e della meditazione.

Fine dell' Idrodinamica

Del Sig. Abbate BOSSUT

SUP-

T.I
3.
4.
5.
8.
9.
10.
11.
14.
15.
16.
20.
21.
22.
26.
27.
28.

T. II.
31.
32.
36.
39.
40.
43.
44.
47.

SUPPLEMENTI
DEL
P. D. GREGORIO FONTANA.

Dalle ſperienze fisiche fatte su tal materia con piccole macchine o ſtromenti, delle quali ſono pieni i libri, ſi ſono dedotti riſultati anco più incerti: baſterà dire che il ſolo attrito delle medeſime macchine, o quello dei fluidi contro il margine degli orifizj, pe' quali ſi ſcagliano, è capace di produrre effetti conſiderabili, e di far dubitare di tutti gli ſperimenti di tal natura per quanta mai diligenza e circoſpezione vi ſi adopri.

D. Giorgio Juan Commend. d'Aliaga, Capo-ſquadra dell'Armata di S. M. Cat. nella ſua Opera ſpagnuola intitolata Esame Marittimo Teorico-Pratico, ovvero Trattato di Meccanica applicata alla coſtruzione, conoscimento, e maneggio de' Vaſcelli, ed altre Imbarcazioni. *Tom. I. pag.* 240. *Madrid* 1771.

SO-

SUPPLEMENTI

Del P. D. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie, Pubblico Professore delle Matematiche Superiori nella Regia Università di Pavia.

PARTE PRIMA

SEZIONE I.

SOPRA LA PRESSIONE DE' FLUIDI

1. Esaminando la pressione de' fluidi contro i corpi immersi, o contro le pareti de' recipienti, mi venne fatto di osservare, che nel Cilindro, e nella Sfera ad esso inscrivibile, se entrambi si sommergono nel fluido fino alla sommità, o se internamente scavandoli si riempie la loro capacità, risulta nelle pressioni esercitate dal fluido contro i detti due corpi quella medesima proporzione sesqialtera, che ARCHIMEDE scoprì così nelle loro solidità, come nelle superficie. Quindi argomentai, non dover essere inutile o sterile l' idea di ridurre a formole generali la pressione de' fluidi ad effetto di ricavarne secondo la varia forma de' corpi sommersi, o de' vasi riem-

piti que' risultati più o meno curiosi e rimarchevoli, cui il soggetto sembra promettere. Restringendomi presentemente in questo breve scritto ai fluidi *omogenei e incompressibili* verrò esponendo succintamente il mio divisamento in questa importante materia, senza assumere dall' Idrostatica altro principio fuori di quello altronde noto nelle molecole fluide per esperienza, vale a dire l' uguaglianza di pressione per ogni verso e secondo tutte le direzioni.

LEMMA.

2. *Un fluido, che riempie un tubo infinitamente sottile* FECD (*Fig.* 1.) *o cilindrico o prismatico avente i lati perpendicolari alla base, e tenuto in una positura comunque obliqua all' orizzonte* AD, *preme il fondo o la base* CD *con uno sforzo equivalente al peso d' un prisma dello stesso fluido, che ha per base la stessa* CD, *e per altezza la vetricale* FA *terminata dall' orizzontale* AD.

DIMOSTRAZIONE.

Sia *M* il centro di gravità del filo d'acqua contenuto nel tubo infinitamente sottile *FECD*, e colla verticale *MP* condotta dal centro di gravità si rappresenti il peso di esso filo, e si risolva lo sforzo *MP* ne' due laterali *MR* perpendicolare alla base *CD*, ed *MN* perpendicolare al lato *FD*. Ciò posto è manifesto, che il

il filo d' acqua non preme il fondo CD se non collo sforzo rappresentato da MR, posciachè l' altro espresso da MN è tutto impiegato a premere le pareti del tubo. Starà dunque il peso del fluido, cioè il prodotto del suo volume nella gravità specifica g, alla pressione p esercitata sul fondo CD, come sta MP ad MR, ovvero per la similitudine de' triangoli PMR, FAD, come FD ad FA, cioè $FD : FA :: DC \times FD \times g : p$; e perciò $p = DC \times FA \times g$. Il che era ec.

SCOLIO.

3. E' di per se chiaro, che qui si prescinde da quella qualunque aderenza, che le molecole del fluido aver possono colle pareti del tubo, come pure da quella forza, che ne' tubi minimi o *capillari* è già conosciuta, la quale opponendosi alle comuni leggi dell' Idrostatica altera e diversifica la pressione del fluido quando con diminuirne l' energia, quando con sospenderne l' esercizio.

TEOREMA I.

4. *In un vaso* ADQB *di qualunque forma* (Fig. 2) *pieno di acqua fino in* BA, *la pressione, che soffre qualunque minima particella, o elemento delle sue pareti, equivale al peso d' un prisma d' acqua avente per base lo stesso elemento, e per altezza la sua profondità sotto il piano di livello* AB.

DIMOSTRAZIONE.

L'elemento *DC* del vaſo può avere tre differenti poſizioni perchè 1.º un tubo priſmatico perpendicolarmente applicato al detto elemento può incontrare il piano di livello *BA* ſenza paſſare pel vaso, come ſi vede nel tubo *DCEF*: 2.º può eſſere parallelo al piano di livello, come *CDIL*: 3.º può concorrere col piano di livello, paſſando però attraverſo il vaſo, ſiccome accade nel tubo *CDRS*.

Caſo 1.º Stando l'acqua così nel tubo *CDFE*, come nel vaſo comunicante *AQB* alla medeſima altezza, o allo ſteſſo livello *BAFN*, ed eſſendo tutto equilibrato, ne viene in conſeguenza, che il luogo *DC* è tanto premuto eſteriormente dall' acqua del tubo *DCFE*, quanto lo è internamente da quella del vaſo, e che però anche interiormente è premuto con uno sforzo, che vale il peſo d'un priſma d'acqua compreſo ſotto la baſe *CD* e ſotto un' altezza uguale alla diſtanza verticale di *CD* dal piano di livello.

Caſo 2.º Si pieghi il tubo orizzontale *CI* in un altro verticale *LN*, che arrivi al piano di livello. Nel tubo *ONCD*, e nel vaſo comunicante *AQB* la ſuperficie ſuperiore dell' acqua ſtagnante e tranquilla occupa lo ſteſſo piano orizzontale. Laonde *CD* è premuto eſteriormente dall' acqua contenuta nel tubo ricurvo

NOCD

NOCD colla ſteſſa energia, ond' è premuto internamente dall' acqua del vaſo *AQB*. Ma egli è evidente, che *CD* è premuto collo ſteſſo sforzo che *LI*, ovvero il ſuo uguale *LM*, e che *LM* porta tutto il peſo dell' acqua contenuta in *MO*, che lo preme verticalmente, il qual peſo appartiene ad un volume d' acqua $= LM \times MN = CD \times MN$. Dunque con queſto ſteſſo sforzo è altresì premuto interiormente *CD* dall' acqua del vaſo.

Caſo 3.° Si adatti al vaſo *AQB* un altro vaſo *BCUT* di qualunque figura per modo che entrambi ſi tocchino in *CD*. L'acqua arriverà in ambedue allo ſteſſo livello, e *CD* ſarà premuto egualmente così dall' acqua del primo vaſo al di dentro, come da quella del nuovo al di fuori, ed a queſta ſeconda preſſione equivale pel caſo 1.° quella dell' acqua nel tubo *CDRS*, cioè a dire il peſo d' un volume priſmatico d' acqua, che ha *CD* per baſe, e per altezza la diſtanza del piano di livello. Il che era ec.

TEOREMA II.

5. *In un vaſo di qualunque figura* ACDB (Fig. 3 e 4.) *la preſſione dell' acqua ſul fondo oriʒʒontale* CD *vale il peſo d' un priſma d' acqua avente il fondo ſteſſo per baſe, e la ſua profondità ſotto il pian di livello per alteʒʒa.*

Fig. 3 e 4

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Ciascun elemento del fondo *CD* è premuto col peso d'un volume d'acqua, che si ha moltiplicando l'elemento per la sua profondità sotto il piano di livello *AB*, ovvero per la profondità del fondo stesso sotto quel piano. Dunque tutto il fondo porta una pressione equivalente al peso d'una mole di acqua eguale al prodotto del fondo per la sua distanza dalla superficie superiore dell'acqua. Il che era ec.

Di qui si comprende come una picciolissima porzione d'acqua possa esercitare una pressione enorme sopra una data superficie.

TEOREMA III.

6. *La pressione, che esercita un fluido omogeneo contro una superficie qualunque, ha per misura il peso d'un volume di fluido uguale al prodotto di questa superficie per la distanza del suo centro di gravità dal pian di livello.*

DIMOSTRAZIONE.

La pressione totale del fluido sopra una superficie qualunque, e comunque situata risulta dalla somma di tutte le pressioni sopra le parti infinitesime, ovvero gli elementi della stessa superficie, che è quanto dire dalla somma de' prodotti di questi elementi, moltiplicati ciascuno per la sua distanza dal pian di livello.

Ma

Ma per la natura del centro di gravità, la ſomma de' prodotti di ciaſcun elemento della ſuperficie per la ſua diſtanza da un piano fiſſo s' agguaglia al prodotto della ſuperficie intera moltiplicata per la diſtanza del ſuo centro di gravità dallo ſteſſo piano (*). Dunque la preſſione contro la ſuperficie totale è miſurata dal peſo di una mole di fluido prodotta dal moltiplicare la ſuperficie per la diſtanza del ſuo centro di gravità dalla ſuperficie ſuperiore del fluido. Il che era ec.

Quanto in appreſſo diremo circa la preſſione interna contro le pareti de' vaſi dall' acqua contenutavi vale ugualmente, com' è manifeſto, per la preſſione eſterna contro le ſteſſe pareti ne' vaſi, o corpi immerſi nell' acqua, ſuppoſta uguale nell' un caſo e nell' altro la riſpettiva diſtanza degli elementi delle pareti dal pian di livello. Dunque I.

(*) Nella Statica ſi dimoſtra il ſeguente Teorema: ſieno più peſi o maſſe M, M', M'', M''', ec., e le riſpettive diſtanze dei centri di gravità di eſſe maſſe da un piano fiſſo ſieno D, D', D'', D''', ec., e finalmente la diſtanza del loro comun centro di gravità dal medeſimo piano ſia Δ; ſarà ſempre la ſomma de' prodotti di ciaſcuna maſſa moltiplicata per la ſua riſpettiva diſtanza dal piano fiſſo uguale al prodotto della ſomma di dette maſſe moltiplicata per la diſtanza del comun centro di gravità dal piano medeſimo, cioè ſarà $MD + M'D' + M''D'' + M'''D''' +$ ec. $= (M + M' + M'' + M''' +$ ec.$)\, \Delta$.

I.

Un vaso prismatico pieno d' acqua tenuto colla base orizzontale soffre nella superficie delle faccie laterali una pressione uguale al peso di tant' acqua, quant' è il prodotto della superficie laterale moltiplicata per la metà dell' altezza del prisma. Ciò è evidente dall' essere il centro di gravità della superficie del prisma alla metà della sua altezza.

II.

Quindi si ricava, che la superficie laterale d' un vaso cubico pieno d' acqua prova una pressione, che vale due volte il peso dell' acqua; e che aggiuntavi la pressione contro la base, la pressione totale ha per misura il triplo del peso dell' acqua.

III.

In un vaso piramidale pieno d' acqua, tenuto colla base orizzontale all' ingiù, e colla cima rivolta all' insù per modo che il pian di livello sia il piano orizzontale, che passa per la cima, la pressione contro la superficie laterale ha per misura il peso di tant' acqua, quanta se ne ha con moltiplicare la detta superficie per due terzi dell' altezza della piramide. In fatti il centro di gravità di quella superficie sta à due terzi dell' altezza della piramide, computando dalla cima.

IV.

Da ciò s' inferisce, che nella stessa piramide sta *la pressione contro la superficie a quella contro la base, come stanno due terzi della superficie alla base*.

V.

V.

Che se il vaso piramidale si tiene colla base orizzontale all' insù, e colla cima rivolta al ingiù, allora *la pressione contro la superficie è misurata dal peso di quel volume d' acqua, che risulta moltiplicando la superficie pel terzo dell' altezza della piramide.*

VI.

Dal che si deduce, che *questa seconda pressione è la metà della prima; e che essa sta alla pressione fatta contro la base nella prima posizione del vaso, come sta un terzo della superficie alla base.*

VII.

Un vaso cilindrico pieno d' acqua situato con base orizzontale porta nella superficie curva tanta pressione, quanto è il peso d' un volume d' acqua risultante dal moltiplicare quella superficie per la metà dell' altezza del cilindro. Di fatti il centro di gravità della superficie curva del cilindro è nel mezzo della sua altezza.

VIII.

Da ciò s' inferisce, che *nel cilindro retto equilatero la pressione contro la superficie curva è doppia della pressione contro la base; ed aggiunta la pressione contro la base, la pressione totale contro tutta la superficie vale tre volte il peso dell' acqua premente,* come appunto nel vaso cubico; *e finalmente la pressione totale è sesquialtera della pressione contro la superficie curva.*

IX.

IX.

L' acqua, che riempie un vaso conico posato sulla sua base orizzontale, preme la superficie curva con uno sforzo uguale al peso di tant' acqua, quant' è il prodotto di questa superficie moltiplicata per due terzi dell' altezza del cono; perchè il centro di gravità della superficie curva del cono trovasi ai due terzi della sua altezza, contando dalla punta.

X.

Ma se il vaso conico si capovolge, sicchè la base orizzontale sia superiore, allora la pressione contro la superficie curva è la metà della precedente.

XI.

Se il vaso è un cono retto, tenuto nella prima situazione, sta la pressione contro la superficie curva a quella contro la base, come due terzi del lato al semidiametro della base, e al peso dell' acqua, che contiene, sta come il doppio lato allo stesso semidiametro.

XII.

Capovolto il cono retto, in questa seconda situazione sta la pressione contro la superficie curva al peso dell' acqua, come il lato del cono al semidiametro della base.

XIII.

Circoscritto il cono retto al cilindro retto, sta la pressione contro la superficie curva del cono nella prima situazione alla pressione contro la superficie curva del cilindro, come due terzi del lato del cono al

lato

lato del cilindro; e nella seconda situazione, come un terzo del lato del cono al lato del cilindro.

XIV.

Supposto il cono equilatero, la pressione contro la superficie curva nella prima situazione è d' un terzo più grande che la pressione contro la base, ed uguaglia quattro volte il peso dell' acqua.

XV.

La pressione contro la base nella prima situazione del cono equilatero è sesquialtera della pressione contro la superficie curva nella seconda situazione.

XVI.

L' acqua, che riempie una sfera, ne preme la superficie con uno sforzo, il quale ha per misura il prodotto della superficie moltiplicata pel semidiametro.

XVII.

La pressione contro la superficie sferica fa tre volte il peso dell' acqua premente.

XVIII.

Dal n.° VIII. si raccoglie, che *la pressione contro tutta la premibile superficie del cilindro circoscritto alla sfera è sesquialtera della pressione contro la superficie della sfera.* E per tal modo quella proporzione sesquialtera, che *ARCHIMEDE* con tanta gloria discoprì fra le superficie e le solidità del cilindro circoscritto e della sfera, viene ora qui estesa da noi anche alle pressioni, che soffrono le superficie di questi due corpi o riem-

riempiuti d' acqua o immersi nell' acqua fino alla loro sommità.

Delle Formole Generali delle Pressioni.

8. Passiamo ora a rintracciare le formole generali della pressione de' fluidi contro un piano qualunque immerso nel fluido in qualsivoglia positura, come pure contro le superficie curve de' corpi, o de' vasi rotondi generati per rotazione. L' applicazione di queste formole a qualche eletto esempio ci guiderà alla cognizione di alcune eleganti proprietà, che chiameremo *idrostatiche*, delle figure geometriche, che ci sono più familiari.

PROBLEMA I.

Ritrovare l' espressione generale della pressione dell' acqua contro un piano qualunque, e comunque situato sotto il fluido premente.

SOLUZIONE.

Fig. 5. Sia il piano $ABDF$ (Fig. 5.) circoscritto dalla retta orizzontale BD, dalla DF perpendicolare alla BD, dall' altra orizzontale FA, e da una linea o retta, o curva AB. Per ritrovare l' inclinazione del piano all' orizzonte, tirisi da F la retta orizzontale FG perpendicolare alla FA, sicchè il piano AFG sia orizzontale. Essendo ora alla comune sezione AF dei due piani $BAFD$, AFG, per-

perpendicolare la FG nel secondo piano, e la FD nel primo, sarà l' angolo GFD l' inclinazione del piano proposto all' orizzonte. Suppongasi, che il livello dell' acqua giunga al punto N della retta prodotta DF, e guidisi NO parallela alla FG: e perchè AF è perpendicolare così alla FD come alla FG, sarà anche il piano AFG perpendicolare al piano DFG, ovvero DNO, e però il piano DNO sarà verticale. Se ora dal punto O preso ad arbitrio nella retta NO casca al basso la verticale OH, si troverà questa nel predetto piano, e taglierà in H la retta DF, in G la FG. Guidate le ordinate infinitamente prossime HM, hm perpendicolari alla FD, e posta l' ascissa $FH = x$, l' ordinata $HM = y$, $BD = a$, $DF = b$, $FN = c$, l'angolo d' inclinazione $GFD = ONH = \varphi$, sarà $OH = (c + x)$ sen. φ, e l' elemento Hm del piano, moltiplicato per la sua distanza HO dalla superficie superiore dell' acqua, rappresenterà la pressione elementare contro lo stesso piano, ossia la pressione contro l' elemento Hm, la quale in conseguenza si troverà $= (c + x) ydx$ sen. $\varphi = (cydx + yxdx)$ sen. φ. Cercato quindi l' integrale di questa espressione per modo che esso si annulli insieme colla x, si otterrà la pressione contro il piano indeterminato $AFHM$; e sostituito b in vece di x nel detto integrale, si ha l' intera pressione contro il dato piano $FABD$. Il che era ec.

L Esem-

10. *Esempio* I. Il piano $ABDF$ sia un rettangolo, e però $y = a$. La formola $\int (cydx + yxdx) \times$ sen. φ diventa $\int (acdx + axdx)$ sen. $\varphi = (acx + \frac{1}{2} ax^2)$ sen. φ, dove fatto $x = b$, l'intera pressione contro il rettangolo diventa $(acb + \frac{1}{2} ab^2)$ sen. φ.

Se l'acqua non oltrepassa il lato superiore del rettangolo, cioè se $c = 0$, la detta pressione si trasforma in $\frac{1}{2} ab^2$ sen. φ, vale a dire nell'area del rettangolo moltiplicata per la metà dell'altezza dell'acqua sopra il lato inferiore del rettangolo.

11. *Esempio* II. Sia il piano proposto un triangolo rettangolo AFD (Fig. 6) colla punta rivolta in giù, e col lato superiore orizzontale FA. Sarà dunque $a = 0$, e posta $FA = f$, nascerà $y = \frac{f(b-x)}{b}$. Laonde $\int (c+x) ydx \times$ sen. $\varphi = \int \frac{f(b-x)}{b} (c+x)\, dx$ sen. φ $= \left(fcx + \frac{1}{2} fx^2 - \frac{fcx^2}{2b} - \frac{fx^3}{3b}\right)$ sen. φ rappresenterà la pressione contro l'area indefinita $AFHM$; e fatta $x = b$, trovasi la pressione contro tutto il triangolo $= (\frac{1}{2} fcb + \frac{1}{6} fb^2)$ sen. φ.

Fig. 6.

Se il triangolo ha la punta rivolta in su, e il lato orizzontale all'ingiù, come nella Fig. 7, allora si ha $y = \frac{ax}{b}$, e $\int (c+x) ydx$ sen. φ $=$

Fig. 7.

$= \int (c + x) \frac{ax}{b} dx$ sen. $\varphi = \left(\frac{cax^2}{2b} + \frac{ax^3}{3b}\right) \times$ sen. φ = alla pressione contro l'area FMH, e quindi posta $x = b$, risulta la pressione contro tutto il triangolo $= (\frac{1}{2} cab + \frac{1}{3} ab^2)$ sen. φ.

Nella prima situazione del triangolo, supponendo $c = 0$, ovvero che il lato del triangolo arrivi al piano di livello, la pressione ricercata diventa $\frac{1}{6} fb^2$ sen. φ, cioè il prodotto del triangolo moltiplicato per un terzo dell'altezza dell'acqua sopra la punta inferiore del triangolo.

Nella seconda situazione, fatto lo stesso supposto di $c = 0$, la pressione si muta in $\frac{1}{3} ab^2$ sen. φ, cioè nell'area del triangolo moltiplicata per due terzi dell'altezza dell'acqua sopra il lato orizzontale inferiore.

12. *Esempio* III. Cerchisi la pressione contro il semicircolo FMD (Fig. 8), il di cui diametro $FD = b$, $a = 0$, $y = \surd (bx - x^2)$, $xdx = \frac{1}{2} bdx - ydy$. Perciò si ha $\int (cydx + yxdx)$ sen. $\varphi = \int (c + \frac{1}{2} b)$ sen. $\varphi ydx - \int y^2 dy$ sen. $\varphi = (c + \frac{1}{2} b) . FHM$.sen. $\varphi - \frac{1}{3} y^3$ sen. φ, e la pressione totale contro il semicircolo risulta $= (c + \frac{1}{2} b) . FMD$.sen. $\varphi = (c + \frac{1}{2} b) \frac{b^2 \pi}{8}$ sen. φ, posta $1 : \pi$ la ragione del diametro alla circonferenza; e il doppio di questo valore somministra la pressione contro tutto il cerchio $FMDR$.

Fig. 8.

13. *Esempio* IV. Sia il piano dato un quadrante GCD, il di cui semidiametro superiore GC sia orizzontale, ed $= b$, $CH' = x$, $H'M' = y$, $a = 0$. Per la natura del cerchio si ha $y^2 = b^2 - x^2$, ed $ydy = - xdx$. Dunque $\int (cydx + yxdx) \times$ sen. $\varphi = \int cydx$ sen. $\varphi - \int y^2 dy$ sen. $\varphi = c$ sen. $\varphi . GCH'M' - \frac{1}{3} y^3$ sen. $\varphi +$ cost. $= c . GCH'M'$. sen. $\varphi + (\frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} y^3)$ sen. $\varphi =$ alla pressione contro l'area indefinita $GCH'M'$; e però la pressione contro tutto il quadrante GCD sarà $= c . GCD$. sen. $\varphi + \frac{1}{3} b^3$ sen. $\varphi = \left(\frac{c\pi}{4} + \frac{1}{3} b \right) b^2$ sen. φ, e questa raddoppiata dà la pressione contro il semicircolo GRD.

14. *Esempio* V. Sia il quadrante GFC, che ha il semidiametro inferiore orizzontale GC; se ne dimanda la pressione. Si ha $CG = CF = b$, $FH = x$, $HM = y$, $y^2 = 2bx - x^2$, $xdx = bdx - ydy$. Adunque $\int (cydx + yxdx)$ sen. $\varphi = \int (c + b) ydx$ sen. $\varphi - \int y^2 dy$ sen. $\varphi = (c + b) . FMH$. sen. $\varphi - \frac{1}{3} y^3$ sen. $\varphi =$ alla pressione contro lo spazio indeterminato FMH. Laonde la pressione totale contro il quadrante diventa $\left(\frac{(c + b) \pi}{4} - \frac{1}{3} b \right) b^2$. sen. φ, e il doppio esprime la pressione contro il semicircolo GFR col diametro inferiore orizzontale.

15. *Esempio* VI. Sia lo spazio parabolico FBD (Fig. 9) compreso dall' ordinata inferiore orizzontale $BD = a$, e dall' ascissa $DF = b$. Supposto

Fig. 9.

posto p il parametro della parabola si ha $y = \sqrt{px}$. Dunque $\int (cydx + yxdx)$ sen. φ

$= \int cp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$ sen. $\phi + \int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx$ sen. $\varphi =$ $(\frac{2}{3}cx\sqrt{px} + \frac{2}{5}x^2\sqrt{px})$ sen. $\varphi = \frac{2}{3}cxy$ sen. φ $+ \frac{2}{5}x^2y$ sen. $\varphi =$ alla pressione contro lo spazio FMH indefinito; e però la pressione contro tutto lo spazio FBD trovasi $(\frac{2}{3}cba + \frac{2}{5}b^2a)$ sen. φ, e il doppio rappresenta la pressione contro lo spazio parabolico BOF colla doppia ordinata inferiore orizzontale BO.

16. *Esempio* VII. Vogliasi la pressione contro lo spazio parabolico ADF (Fig. 10) circoscritto superiormente dall' ordinata orizzontale $FA = a$, e dall' ascissa $FD = b$. Essendo $FH = x$, ed $HD = b - x$, l'equazione della parabola trovasi essere $y^2 = p(b - x)$. Adunque $\int (cydx + yxdx)$ sen. $\varphi = \int cdx\sqrt{(pb - px)}$ sen. φ $+ \int xdx$ sen. $\varphi\sqrt{(pb - px)}$. Pongasi ora $\sqrt{(pb - px)} = u$, ed è $\int cdx$ sen. $\varphi . \sqrt{(pb - px)} +$ $\int xdx$ sen. $\varphi\sqrt{(pb - px)} = \int - \frac{2cu^2du \text{ sen. } \varphi}{p}$ $+ \int - \frac{2bu^2du \text{ sen. } \varphi}{p} + \int \frac{2u^4du \text{ sen. } \varphi}{p^2} = -$ $\frac{2cu^3 \text{ sen. } \varphi}{3p} - \frac{2bu^3 \text{ sen. } \varphi}{3p} + \frac{2u^5 \text{ sen. } \varphi}{5p^2} + \text{cost.}$ $= \frac{2(pb - px)^2 \text{ sen. } \varphi\sqrt{(pb - px)}}{5p^2}$ $- \frac{2(c + b)(pb - px) \text{ sen. } \varphi\sqrt{(pb - px)}}{3p} + \text{cost.}$

Fig. 10.

$= \frac{2}{3} b (c + b)$ fen. $\varphi \sqrt{pb} - \frac{2}{5} b^2$ fen. $\varphi \sqrt{pb}$
$+ \frac{2 (pb - px)^2 \text{ fen. } \varphi \sqrt{(pb - px)}}{5p^2}$
$- \frac{2 (c + b) (pb - px) \text{ fen. } \varphi \sqrt{(pb - px)}}{3p}$, perchè fvanifce la preffione annullandofi la x. Quefto valore efprime la preffione contro lo fpazio indefinito $FAMH$, e foftituendo in effo b per x rifulta la preffione totale contro lo fpazio parabolico $FAD = \frac{(10bc + 4b^2) \text{ fen. } \varphi \sqrt{pb}}{15}$, e dal doppio di quefto valore fi ha la preffione contro lo spazio $FADQ$.

17. *Efempio* VIII. Cerchifi la preffione contro Fig. 11. la femielliffe FBD (Fig. 11) fituata coll' affe minore BQ orizzontale. Chiamato a l'affe maggiore FD, b l'affe minore BQ, la proprietà dell' elliffe fomminiftra l'equazione $a^2 y^2 = b^2 (ax - x^2)$, e quindi $xdx = \frac{1}{2} adx - \frac{a^2 ydy}{b^2}$. Laonde farà la preffione contro lo fpazio indefinito $FMH = \int (cydx + yxdx)$ fen. $\varphi = \int (c + \frac{1}{2} a) ydx$ fen. φ $- \int \frac{a^2 y^2 dy \text{ fen. } \varphi}{b^2} = (c + \frac{1}{2} a) . FMH .$ fen. φ $- \frac{a^2 y^3 \text{ fen. } \varphi}{3b^2}$; e quindi la preffione totale contro la femielliffe $= (c + \frac{1}{2} a) . FDB .$ fen. φ $= \frac{1}{8} (c + \frac{1}{2} a) \pi ab$ fen. φ, il di cui doppio esprime la preffione contro tutta l' elliffe in

quefta

questa situazione, cioè coll' asse minore orizzontale.

18. *Esempio* IX. Sia da trovarsi la pressione contro il quadrante ellittico BDO, situato col diametro minore orizzontale, e rivolto all' insù. Chiamisi $\frac{1}{2}b$ il semiasse minore BO, $\frac{1}{2}a$ il maggiore OD, x la OH', y la $H'M'$, e si avrà $a^2y^2 = b^2(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$, $\frac{a^2ydy}{b^2} = -xdx$. Perciò $\int(cydx + yxdx)$ sen. $\varphi = c.OBM'H'$ sen. $\varphi - \frac{a^2y^3 \text{ sen. } \varphi}{3b^2} +$ cost. $= c.OBM'H'.$ sen. $\varphi + \frac{1}{24}a^2b$ sen. $\varphi - \frac{a^2y^3 \text{ sen. } \varphi}{3b^2} =$ alla pressione contro l' area indefinita $OBM'H'$. Perlocchè la pressione contro tutto il quadrante BDO sarà $= c.BDO.$sen. $\varphi + \frac{1}{24}a^2b$ sen. $\varphi = \frac{1}{16}\pi cab$ sen. $\varphi + \frac{1}{24}a^2b$ sen φ, e il doppio di questo valore darà la pressione contro la semiellisse BDQ avente l' asse minore orizzontale rivolto all' insù.

19. *Esempio* X. Se fosse da cercarsi la pressione contro il quadrante ellittico FBO, situato col semiasse minore orizzontale BO rivolto all' ingiù, basterebbe nell' equazione (*Esemp.* VIII.) $(c + \frac{1}{2}a).FMH$ sen. $\varphi - \frac{a^2y^3 \text{ sen. } \varphi}{3b^2}$ sostituire $\frac{1}{2}b$ in luogo di y, d' onde nascerebbe

I

$\frac{1}{16}(c+\frac{1}{2}a)\pi ab$ sen. $\varphi - \frac{1}{24}a^2b$ sen. $\varphi =$ alla pressione contro il quadrante ellittico FBO, e il doppio di questo valore esprimerebbe la pressione contro la semiellisse FBQ coll' asse minore orizzontale rivolto in giù.

20. *Esempio* XI. Dimandasi la pressione contro la semiellisse FBD (Fig. 12) situata col semiasse moggiore BO orizzontale, e coll' asse minore FD inclinato all' orizzonte. Ritenute le denominazioni di prima, trovasi per la natura dell' ellisse $\frac{b^2y^2}{a^2} = bx - x^2$, e però $xdx = -\frac{b^2ydy}{a^2} + \frac{1}{2}bdx$. Dunque $\int(cydy + yxdx)$ sen. $\varphi =$ $(c+\frac{1}{2}b).FMH.$sen. $\varphi - \frac{b^2y^3 \text{ sen. } \varphi}{3a^2} =$ alla pressione contro lo spazio indefinito FMH, e e in conseguenza la pressione totale contro la semiellisse risulta $= \frac{1}{8}(c+\frac{1}{2}b)\pi ab$ sen. φ, il qual valore duplicato dà la pressione contro tutta l' ellisse $BFQD$ situata coll' asse maggiore orizzontale e col minore inclinato all' orizzonte.

Fig. 12.

21. *Esempio* XII. Se vuolsi la pressione contro il quadrante ellittico BDO col semiasse maggiore orizzontale rivolto all' insù; posta $OH'=x$, $H'M'=y$, si ha l' equazione $\frac{b^2y^2}{a^2} = \frac{1}{4}b^2 - x^2$, e quindi $xdx = -\frac{b^2ydy}{a^2}$, e conseguentemente

$\int$

$\int (cydx + yxdx)$ sen. $\varphi = c.OBM'H'$.sen. $\varphi - \frac{b^2y^3 \text{ sen. } \varphi}{3a^2}$ + cost. $= c.OBM'H'$.sen. $\varphi + \frac{1}{24} b^2 a$ sen. $\varphi - \frac{b^2y^3 \text{ sen. } \varphi}{3a^2}$ = alla pressione contro lo spazio indefinito $OBM'H'$; e però la pressione totale contro il quadrante BDO sarà $= \frac{1}{16} \pi cab$ sen. $\varphi + \frac{1}{24} b^2 a$ sen. φ, il qual valore duplicato rappresenta la pressione contro la semiellisse BDQ situata coll' asse maggiore orizzontale rivolto all' insù.

22. *Esempio* XIII. Se trattasi di trovare la pressione contro il quadrante ellittico FBO situato col semiasse maggiore orizzontale BO rivolto al basso, allora basta nella formola (*Esemp.* XI.) $(c + \frac{1}{2} b).FMH$. sen. $\varphi - \frac{b^2y^3 \text{ sen. } \varphi}{3a^2}$, la quale rappresenta la pressione contro lo spazio indefinito FMH, sostituire il quadrante FBO in vece di FMH, ed $\frac{1}{2} a$ in luogo di y, ed hassi $(c + \frac{1}{2} b).FBO$.sen. $\varphi - \frac{1}{24} b^2 a$ sen. $\varphi = \frac{1}{16} (c + \frac{1}{2} b) \pi ab$ sen. $\varphi - \frac{1}{24} ab^2$ sen. φ = alla pressione contro il quadrante ellittico FBO; e il doppio di questo valore rappresenta la pressione contro la semiellisse FBQ situata coll' asse maggiore orizzontale rivolto all' ingiù.

23. *Esempio* XIV. Sia da trovarsi la pressione con-

Fig. 13. contro lo ſpazio Iperbolico FBD (Fig. 13) circoſcritto dall' ordinata orizzontale inferiotmente $BD = h$, e dall' aſciſſa $FD = k$ inclinata all' orizzonte. Nominando a l' aſſe principale dell' Iperbola, b il conjugato, ſi ſa, l' equazione di queſta curva eſſere $\frac{a^2y^2}{b^2} = ax + x^2$, e quindi $xdx = \frac{a^2ydy}{b^2} - \frac{1}{2}adx$. Perciò $\int (cydx + yxdx)$ ſen. φ $= (c - \frac{1}{2}a)$. FMH. ſen. $\varphi + \frac{a^2y^3 \text{ ſen. } \varphi}{3b^2} =$ alla preſſione contro lo ſpazio indefinito FMH. Laonde la preſſione totale contro lo ſpazio propoſto FBD ſarà $= (c - \frac{1}{2}a)$. FBD. ſen. $\varphi + \frac{a^2h^3 \text{ ſen. } \varphi}{3b^2}$, e il doppio rappreſenterà la preſſione contro il doppio ſpazio FBC.

24. *Eſempio* XV. Sia finalmente da determinarſi la preſſione contro lo ſpazio iperbolico

Fig. 14. inverſo FBD (Fig. 14) compreſo ſuperiormente dall' ordinata orizzontale $FB = h$, e dall' aſciſſa $FD = k$. Poſta pertanto $FH = x$, $HM = y$, la proprietà dell' Iperbola ſomminiſtra l' equazione $\frac{a^2y^2}{b^2} = a(k - x) + (k - x)^2$ $= ak + k^2 - ax - 2kx + x^2$, dalla quale ſi ottiene $xdx = \frac{a^2ydy}{b^2} + (\frac{1}{2}a + k)dx$. Adunque $\int(cydx + yxdx)$ ſen. $\varphi = (c + \frac{1}{2}a + k)$. $FBMH$. ſen φ

+

$$+\frac{a^2y^3 \text{ sen.}\varphi}{3b^2}+\text{cost.}=(c+\tfrac{1}{2}a+k).FBMH.\text{sen.}\varphi$$

$$-\frac{a^2h^3 \text{ sen. }\varphi}{3b^2}+\frac{a^2y^3 \text{ sen. }\varphi}{3b^2}=$$ alla pressione contro lo spazio indefinito $FBMH$. Perlocchè la pressione totale contro il dato spazio FBD trovasi $=(c+\frac{1}{2}a+k).FBD.\text{sen. }\varphi-\frac{a^2h^3 \text{ sen. }\varphi}{3b^2}$, il doppio di cui esprime la pressione contro il doppio spazio BCD situato colla doppia ordinata orizzontale rivolta all' insù.

PROBLEMA II.

25. *Nel vaso* DAHGFEBC (Fig. 15.), *che ha per base orizzontale il rettangolo* ADCB, *e per uno de' suoi lati ha il rettangolo* DAHG *comunque inclinato all' orizzonte, arriva l' acqua fino ad* HF; *e in un altro vaso* DAHGQPRS *situato sulla predetta base prolungata ed avente lo stesso lato* DAHG *giugne l' acqua fino al punto* O: *cercasi qual sarà la pressione, che soffre quel lato secondo una sola e medesima direzione.*

Fig. 15.

SOLUZIONE.

Tirisi per O la verticale MON; e sarà (*Esemp. I.*) la pressione esercitata dall' acqua del primo vaso X contro il lato rettangolare $DAHG = DA.AH.\frac{1}{2}MN$, e la pressione esercitata dall'acqua del secondo vaso Z contro il lato rettangolare $OTDA$ sarà $=DA.AO.\frac{1}{2}MO$, ed

ed esercitandosi questa seconda pressione in una direzione opposta alla prima si avrà in conseguenza la pressione contro tutto il lato $DAHG$ verso una sola e medesima direzione $= DA.AH.\frac{1}{2}MN - DA.AO.\frac{1}{2}MO$, ovvero (essendo $NM:MO::HA:AO$) $= \frac{1}{2}MN.DA.AH - \frac{1}{2}\frac{DA.HA.MO^2}{MN} = \frac{DA.AH}{2MN}(MN^2 - MO^2)$. Il che era ec.

La suddetta pressione seguita adunque la ragione della differenza dei quadrati di MN e di MO, cioè delle altezze dell'acqua ne' due vasi.

PROBLEMA III.

26. *Sopra il piano inclinato* NMPO (Fig. 16.) *giace il vaso prismatico retto pieno d'acqua* GADHFECB, *del quale le due faccie opposte* GADH, BFEC *sono due trapezj paralleli, simili ed uguali, i di cui lati* BF, CE, AG, DH *in questa giacitura del prisma vengono a riuscire verticali, e co' loro estremi* G, H, F, E *giungono allo stesso piano orizzontale; cercasi la pressione contro le due faccie rettangole verticali* BAGF, DHEC, *e quindi lo sforzo, col quale il prisma tenderà a discendere pel piano inclinato.*

Fig. 16.

SOLUZIONE.

La pressione contro il rettangolo $GABF$ si è trovata (*Esemp. I.*) $= \frac{1}{2}AB.BF^2$, e quella

quella contro il rettangolo $DCEH = \frac{1}{2} DC \times CE^2 = \frac{1}{2} AB . CE^2$; e queste pressioni esercitandosi in direzioni opposte, risulta la pressione, colla quale il prisma viene orizzontalmente spinto alla discesa, $= \frac{1}{2} AB (BF^2 - CE^2)$. Il che era ec.

27 Pongasi $AB = a$, $BF = b$, l'angolo d'inclinazione $MPQ = \omega$, e tirata l'orizzontale $CR = FE = f$, sarà l'angolo $BCR = \omega$, $BR = f. \text{ tang. } \omega = BF - FR = BF - CE$, cioè $CE = b - f. \text{ tang. } \omega$. Sarà dunque il trapezio $BFEC = \frac{1}{2} FE (BF + CE) = \frac{1}{2} f (2b - f. \text{ tang. } \omega)$, e quindi il volume del prisma $= \frac{1}{2} af (2b - f. \text{ tang. } \omega)$. Dicasi Q il peso di questo prisma pieno d'acqua; e poichè abbiamo la pressione orizzontale, tendente a far discendere il prisma $= \frac{1}{2} a [b^2 - (b - f. \text{ tang. } \omega)^2] = \frac{1}{2} a f. \text{ tang. } \omega (2b - f. \text{ tang. } \omega)$, sarà perciò una tal pressione $= Q. \text{ tang. } \omega$.

28 Chiamato q il peso del vaso prismatico vuoto, è noto dalla Statica, che un peso $Q + q$ situato sovra il detto piano inclinato viene tenuto in equilibrio sul piano stesso da una forza orizzontale $= (Q + q) \text{ tang. } \omega$. Ma per tenere in equilibrio il detto prisma pieno d'acqua, non basta una forza orizzontale, la quale sostenga sul piano inclinato il peso $Q + q$ di quel prisma, richiedendosi inoltre un'altra forza per equilibrare la pressione o-

orizzontale Q . tang. ω. Confeguentemente il prisma viene foſtenuto ſul piano inclinato da una forza orizzontale $= (2\ Q + q) \times$ tang. ω,

SCOLIO.

29 Avvertaſi qui, che non ſi è voluto tener conto di quella preſſione orizzontale, che riſulta dalla preſſione contro la baſe $ADCB$, la qual preſſione orizzontale riſcontraſi eguale e contraria alla già ritrovata, ſiccome appunto dee ſuccedere, eſſendo noto, che le preſſioni orizzontali ſi annullano ſempre in tutti i vaſi, o corpi eſpoſti alla preſſione dell' acqua. Rappreſenti in fatti il trapezio $BFEC$ la ſezione verticale fatta con un piano verticale e perpendicolare alle due faccie GB, HC; e la preſſione contro la base BC del trapezio eſpreſſa dalla normale TX ſi riſolva nella verticale TY, e nella orizzontale XY, e ſtarà $TX : XY :: BC : BR$, e però $XY = \frac{TX . BR}{BC}$. Siccome poi la preſſione $TX = BC . \frac{1}{2} (BF + CE)$, ſarà $XY = \frac{1}{2} (BF + CE) . BR = \frac{1}{2} (BF + CE) . (BF - CE) = \frac{1}{2} BF^2 - \frac{1}{2} CE^2$, e queſta moltiplicata per AB dà la preſſione orizzontale riſultante dalla preſſione contro la baſe $ADCB$, che ſi trova appunto uguale, e contraria alla precedente. E' un errore di non pochi acclamati Scrittori quello di credere, che l' acqua a motivo delle preſ-

pressioni, con cui spinge ed incalza secondo tutte le direzioni le pareti de' vasi, che la contengono, possa produrre ne' vasi d'una data forma situati sulle loro basi orizzontali un rovesciamento, o capitombole, laddove all' opposto la stessa acqua ghiacciata lascia il vaso ritto ed immobile sulla sua base; per modo che sia una differenza essenziale in ordine alla sua stabilità, che il vaso si trovi pieno di acqua fluida, oppure d'acqua ghiacciata. Per togliere un tal pregiudizio, e mostrare, che i due stati opposti dell' acqua, cioè di fluidità, e di solidità non possono cagionare la menoma alterazione o divario nello stato del vaso in riguardo al reggersi sulla sua base, o al rovesciarsi, basterà far vedere che la *risultante* di tutte le pressioni esercitate dall' acqua fluida contro tutte le pareti del vaso perfettamente coincide colla *linea di direzione*, secondo la quale agisce tutto il peso dell' acqua o del ghiaccio. Sia a cagion d'esempio il triangolo verticale BAC (Fig. 25) colla base orizzontale BC, e suppongasi la sua aja formata d'uno strato di acqua premente contro i lati del triangolo. Tirisi dalla punta A del triangolo sulla base orizzontale prolungata BC la perpendicolare AM. E' noto, che la base BC soffre una pressione $= BC.AM$, che questa pressione passa pel punto di mezzo N della base, e può rappresentarsi colla retta verticale QN. Parimente il

Fig. 25.

il lato AB risente una pressione $= \frac{1}{2} AB.MA$, la quale passa pel *centro di pressione* S, che è ai due terzi di AB contando da A, come si deduce dalla Teoria del centro di pressione, che esporremo più sotto, e può rappresentarsi colla retta IS normale ad AB. Risoluta poscia la pressione IS nella orizzontale IO, e nella verticale OS tendente all' insù, trovasi $OS = \frac{BM.IS}{BA} = \frac{1}{2} BM.MA$. Così pure se la pressione contro il lato AC, la quale è $= \frac{1}{2} AC.AM$, si concepisce applicata al centro di pressione in F ai due terzi di AC contando da A, e si esprime colla retta FR perpendicolare ad AC, e si risolve nell' orizzontale RP, e nella verticale FP tendente all' ingiù, se ne deduce tosto $FP = \frac{CM.FR}{AC} = \frac{1}{2} CM.MA$. Abbiamo dunque tre forze verticali, che agiscono contro i lati del triangolo, cioè

$$1.^{\circ} + QN = BC.MA,$$
$$2.^{\circ} - OS = - \tfrac{1}{2} BM.MA,$$
$$3.^{\circ} + FP = \tfrac{1}{2} CM.MA.$$

La distanza della prima dal punto M è $= MC + \frac{1}{2} CB$; la distanza della seconda è $= \frac{2}{3} BM = \frac{2}{3} CM + \frac{2}{3} CB$; quella della terza è $= \frac{2}{3} CM$. Dunque per la dottrina Statica de' Momenti la distanza della *risultante* di queste tre forze dallo stesso punto M sarà

=

$= \left(QN (MC + \frac{1}{2}CB) + FP.\frac{2}{3}CM - OS(\frac{2}{3}MC + \frac{2}{3}CB) \right) : \left(QN + FP - OS \right)$
$= \left(BC.MA(MC + \frac{1}{2}CB) + \frac{1}{2}CM.MA.\frac{2}{3}CM - \frac{1}{2}BM.MA(\frac{2}{3}MC + \frac{2}{3}CB) \right) : \left(BC.MA + \frac{1}{2}CM.MA - \frac{1}{2}BM.MA \right) = \left(BC(MC + \frac{1}{2}CB) + \frac{1}{3}CM^2 - \frac{1}{2}(BC + CM)(\frac{2}{3}CM + \frac{2}{3}CB) \right) : \left(\frac{1}{2}BC \right) = \frac{2}{3}MC + \frac{1}{3}BC$. Ora questa distanza è appunto quella della linea di *direzione* EG dal detto punto M; poichè venendo essa condotta verticalmente dal centro di gravità E del triangolo posto ai due terzi della AN che biparte la base, viene ad essere, a motivo di $AE = \frac{2}{3}AN$, $GM = \frac{2}{3}NM = \frac{2}{3}MC + \frac{2}{3}CN = \frac{2}{3}MC + \frac{1}{3}CB$. Dunque la *risultante* di tutte le pressioni contro il perimetro del triangolo coincide colla *linea di direzione*

PROBLEMA IV.

30 *Determinare la pressione dell' acqua contro le pareti curve de' vasi rotondi, ossia di rotazione.*

SOLUZIONE.

Rotisi la linea AMP (*Fig.* 17.) intorno all' asse verticale BD, e descriva un vaso ro-

tondo, il quale riempiasi d'acqua. Si cerca la pressione sopra la superficie curva del vaso. Condotte le ordinate ortogonali infinitamente vicine MN, mn, e fatta $PD = a$, $AB = b$, $BD = c$, $BF = x$, $MF = y$, $AM = s$, ed $1 : \pi =$ al rapporto del diametro alla circonferenza del cerchio, sarà $2\pi y =$ alla circonferenza del cerchio, che ha MF per raggio; e però l' elemento della superficie curva del vaso sarà $= 2\pi y$. $Mm = 2\pi y ds$, e la pressione contro questo elemento sarà $= 2\pi yxds = 2\pi yx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Quindi integrata questa pressione elementare per modo che l' integrale si annulli colla x, si ottiene la pressione contro la superficie indefinita $AMNC$; e posto poi c per x nell' integrale si ha la pressione contro tutta la superficie curva. Il che era ec.

31 *Esempio* I. Vuolsi conoscere la pressione contro la superficie curva del cono retto troncato. In tal supposto egli è visibile, che la linea AMP è $= \sqrt{(c^2 + (b - a)^2)}$, cui diremo h. E' altresì manifesto, che si ha $s : h :: x : c$, e perciò $s = \frac{hx}{c}$, e $ds = \frac{hdx}{c}$. Inoltre egli è visibile, che sta $b - y : x :: b - a : c$; laonde $y = b - \frac{(b-a)x}{c}$. Dunque $\int 2\pi yxds = \int \left(2bx - \frac{2(b-a)x^2}{c} \right) \frac{\pi hdx}{c} = \frac{\pi h}{c} \left(bx^2 - \frac{2(b-a)x^3}{3c} \right) =$ alla pressione

contro la superficie curva indefinita $AMNC$. Posto c in luogo di x si ricava $2\pi hc\left(\frac{1}{6}b+\frac{1}{3}a\right)$ $=$ alla pressione contro la superficie curva intera del cono troncato.

32 Il valore di questa pressione assegnato da alcuni celebri Idrostatici è palesemente erroneo, e l' errore è nato per aver essi supposto, che due lati del cono troncato infinitamente vicini rinchiudessero frà di sè sulla superficie del cono un rettangolo, laddove essi comprendono un trapezio di basi parallele.

33 *Esempio* II. Si cerca la pressione contro la superficie curva $BMILN$ (*Fig.* 18.) del segmento sferico generato dalla rotazione dell' arco circolare BMI intorno al diametro verticale BD. Essendo $BF=x$, $MF-Y$, e il raggio del circolo $=r$, si ha $y=\sqrt{(2rx-x^2)}$, e $dy=\frac{(r-x)\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$; e quindi $dx^2+dy^2=ds^2=\frac{r^2\,dx^2}{y^2}$, ovvero $ds=\frac{rdx}{y}$; e quest' ultimo valore surrogato nella formola $\int 2\pi yxds$, ella si trasforma in $\int 2\pi rxdx=\pi rx^2=$ alla pressione contro la superficie indefinita BMN. Siccome poi è $\pi rx^2=2\pi rx.\frac{1}{2}x$, cioè $=$ alla superficie del segmento moltiplicata per la metà della saetta, o dell' altezza dell' acqua sopra MN, perciò un tal prodotto rappresenta la pressione suddetta.

34 *Esempio* III. Se la superficie del segmento sferico fosse PDS colla base orizzontale rivolta

all' insù; allora posta $RU = x$, $UM' = y$, $RD = h$, e però $DU = h - x$, l'equazione del circolo dà $y = \sqrt{(2r(h-x) - (h-x)^2)}$, e quindi $dy = \frac{-rdx + (h-x)dx}{\sqrt{(2r(h-x)-(h-x)^2)}}$, $dy^2 + dx^2 = \frac{r^2dx^2}{y^2}$, $\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = ds = \frac{rdx}{y}$. Dunque $\int 2\pi yxds = \int 2\pi rxdx = \pi rx^2$, vale a dire la pressione contro la superficie indefinita $PM'N'S$ equivale al prodotto della superficie istessa moltiplicata per la metà della sua saetta, o ascissa RU, ovvero per la metà dell' altezza dell' acqua sopra $M'N'$.

35 Laonde la superficie curva d'un segmento sferico pieno d'acqua, o sia esso a foggia di cupola, o sia rinchiuso fra due cerchj paralleli soffre una pressione, che ha per misura la stessa superficie moltiplicata per la metà della saetta. Osservisi qui, che sempre nel mezzo della saetta trovasi il centro di gravità della superficie curva del segmento.

36 La formola $\int 2\pi yxds$ dà la pressione contro la superficie curva del vaso soltanto nell' ipotesi, che l' acqua non oltrepassi l'orlo superiore del vaso, ed abbia x per altezza sopra l' elemento della superficie: che se l' acqua giugnesse più sù della superficie del vaso per modo che l'altezza di quella sopra l'orlo di questo fosse $= h$, è chiaro, che in tal caso la formola

mola della pressione diverrebbe $\int 2\pi y\,(h+x)ds$, la quale si tratta con ugual facilità che la prima.

PROBLEMA V.

37 *Nell'argine, o riparo rettangolare* OPMN *d'un fiume* (Fig. 16) *giugne l'acqua da* OP *fino ad* IK: *cercasi lo sforzo, con cui l'argine sarà spinto dall'acqua orizzontalmente, e quello, con cui sarà spinto dalla medesima all'ingiù verticalmente.*

SOLUZIONE.

Chiamato ω l'angolo d'inclinazione MPQ dell'argine, $PK = a$, $KI = PO = b$, e la verticale $KU = h$, risulta la pressione contro l'argine (*Probl. I. Esemp. I.*) $= \frac{1}{2}abh = \frac{bh^2}{2\,\text{sen.}\,\omega}$. Ma questa pressione si esercita in una direzione KS perpendicolare al piano dell'argine; perciò se ne faccia la risoluzione nelle due pressioni laterali KL, KZ, quella orizzontale, questa verticale. Ora è noto dalla Statica, che sta $KS : KL : LS :: 1 : \text{sen}\,\omega : \text{cos}.\,\omega ::$ Press. perpend. : Press. orizz. : Press. vertic. Dunque Press. orizz. $= \frac{bh^2}{2\,\text{sen.}\,\omega}\,\text{sen.}\,\omega = \frac{1}{2}bh^2$; Press. vertic. $= \frac{bh^2}{2\,\text{sen.}\,\omega}\,\text{cos.}\,\omega = \frac{1}{2}\,bh^2\,\text{cot.}\,\omega$. Il che era ec.

PROBLEMA VI.

38 *Una cataratta, ossia una tavola rettangolare verticale chiude in un canale, o cisterna all' acqua l' uscita: cercasi quanta forza sia d' uopo per alzarla, e dar l' esito all' acqua.*

SOLUZIONE.

Detta b la base della cataratta, a l' altezza, c la distanza del suo lato superiore dal pian di livello, che si suppone più alto, si sa per le cose già dimostrate, che la pressione contro la cataratta è $= ab(\frac{1}{2}a + c)$. Con siffatta pressione è dunque direttamente spinta la cataratta contro gl'incastri. Laonde supposto l'attrito una parte $n.^{esima}$ della pressione, risulterà l' attrito della cataratta cogl' incastri $= \frac{1}{2n} ab(a + 2c)$, ed aggiunto a questo il peso p della cataratta, vi vorrà una forza $= \frac{ab(a + 2c) + 2np}{2n}$ per far equibrio colla resistenza della cataratta, e un po' maggiore per sollevarla. Il che era ec.

39 Reca meravglia il vedere presso alcuni celebri moderni Scrittori di Meccanica, che per calcolare la forza necessaria a sollevare la cataratta non solamente si mette in conto la resistenza dello sfregamento contro gl' incastri, ed il peso della cataratta, ma ben anche la pres-

sione

ſione totale eſercitata dall' acqua contro il piano della cataratta, e ſi ſtabilisce in conſeguenza, dover eſſere la detta forza un po' maggiore della ſomma di queſte tre. Ma eſſendo la preſſione dell' acqua contro la cataratta perpendicolare alla medeſima, ed anche alla direzione della forza, che tende a ſollevarla, è coſa innegabile, che l' una non può nè punto nè poco impedire l' effetto dell' altra, e non può quindi la preſſione entrare nel calcolo, se non per quella parte, che coſtituisce lo sfregamento.

Se il lato ſuperiore della cataratta giugne al pian di livelo, ovvero è $c = o$, egli è evidente, che a miſura che la cataratta ſi va innalzando una minor parte di eſſa reſta espoſta alla preſſione dell' acqna. Suppongaſi innalzata di tanto, che la diſtanza del ſuo lato inferiore dal pian di livello ſia $= x$, e però la preſſione in tal caſo diventi $= \frac{1}{2} bx^2$, e l' attrito $= \frac{bx^2}{2n}$. La forza motrice, colla quale la cataratta tende a diſcendere, qualora venga abbandonata, trovaſi $= p - \frac{bx^2}{2n}$, e l' acceleratrice $= 1 - \frac{bx^2}{2np}$. Perciò chiamato t il tempo, in cui la cataratta diſcede per l' altezza x, v la ſua velocità nel termine del tempo t, ſi avrà $\left(1 - \frac{bx^2}{2np}\right) dt = dv$, cioè, eſſendo $dt =$

 dx

$\frac{dx}{v}$, si otterrà $\left(1 - \frac{bx^2}{2np}\right) dx = vdv$, ed integrando $x - \frac{bx^3}{6np} = \frac{1}{2} v^2$, $v = \sqrt{\left(2x - \frac{bx^3}{3np}\right)}$, e quindi

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\left(2x - \frac{bx^3}{3np}\right)}},\ t = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(2x - \frac{bx^3}{3np}\right)}}.$$

Ma se $p < \frac{bx^2}{2n}$, allora la cataratta non discende, e fa d' uopo d' una forza capace di vincer l' attrito per farla discendere. Sia questa forza il peso q, ed avremo $q + p - \frac{bx^2}{2n} =$ alla forza motrice della discesa, e però $1 - \frac{bx^2}{2n(p+q)} =$ alla acceleratrice. Laonde $\left(1 - \frac{bx^2}{2n(p+q)}\right) dx = vdv$,

$$x - \frac{bx^3}{6n(p+q)} = \frac{1}{2} v^2,\ v = \sqrt{\left(2x - \frac{bx^3}{3n(p+q)}\right)},$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(2x - \frac{bx^3}{3n(p+q)}\right)}}.$$

40 Qualora vogliasi sollevare la cataratta, dicasi f la forza impiegata per sollevarla, e sia $a - x$ la di lei salita nel tempo t colla velocità v. La forza motrice della salita sarà dunque

f

$f - p - \frac{bx^2}{2n}$, e però $\frac{2nf - 2np - bx^2}{2n(f+p)}$ sarà la forza acceleratrice. Conseguentemente si ottiene $\frac{(2nf - 2np - bx^2)dx}{2nf + 2np} = vdv$, e quindi

$$\frac{(2nf - 2np)x - \frac{1}{3}bx^3}{2nf + 2np} = \frac{1}{2}v^2 + \text{cost.},$$

ed essendo $v = 0$ quando $x = a$, si ha

$$v^2 = \frac{(2nf - 2np)(x - a) + \frac{1}{3}b(a^3 - x^3)}{n(f+p)},$$

cioè

$$v = \sqrt{\frac{(2nf - 2np)(x - a) + \frac{1}{3}b(a^3 - x^3)}{n(f+p)}};$$

e finalmente

$$t = \int \frac{dx\sqrt{[n(f+p)]}}{\sqrt{[(2nf - 2np)(x - a) + \frac{1}{3}b(a^3 - x^3)]}}.$$

Del centro di Pressione.

41. Una cosa degna di considerazione nella Dottrina della pressione dei fluidi è quella, che riguarda il *Centro di pressione*. Dicesi pertanto Centro di pressione quel punto della superficie premuta, nel quale si concepisce concentrata e raccolta l'intera pressione, che è distribuita e dispersa per tutti i punti della superficie; ovvero quel punto, al quale applicata una forza uguale e contraria all'intera pressione bilancia e distrugge tutto l'effetto di questa, per modo che

che se la pressione tende ad imprimere alla superficie un moto qualunque, la forza uguale e contraria applicata al centro della pressione impedisce e distrugge un tal moto.

PROBLEMA VII.

42. *Ritrovare il centro di pressione di qualunque superficie piana* BAFG (Fig. 19) *divisa in due parti uguali e simili dalla linea delle ascisse* MI, *ed immersa dentro un fluido omogeneo a qualunque profondità, e sotto qualunque inclinazione al pian di livello, purchè le ordinate* AM, CE, ec. *siano parallele al detto piano.*

Fig. 19.

SOLUZIONE.

La comune sezione del pian di livello, e del piano proposto $GFAB$ prodotto sia la retta OQ, e condotte le due doppie ordinate infinitamente prossime CD, cd, lo spazietto $CDdc$ sarà l'elemento dell'area indefinita $ACDB$. Ora questo elemento soffre dal fluido, che vi gravita sopra, una pressione equivalente al peso d'un volume di fluido, che nasce dal moltiplicare l'elemento per la sua distanza dal pian di livello, la qual distanza è per ipotesi la stessa per tutti i punti di detto elemento. Si conduca EO normale ad OQ, e dal punto O si guidi nel pian di livello la OR normale all'istessa OQ, e finalmente alla OR s'innalzi dal punto E la perpendicolare ER: egli è manifesto, che

ER

ER sarà la mentovata diſtanza, ed EOR l'angolo d'inclinazione del dato piano all'orizzonte; e conſeguentemente l'elemento $CDdc$ moltiplicato per ER rappreſenta la preſſione elementare contro il piano indefinito $CABD$. Conſiderata pertanto queſta preſſione elementare a guiſa d'un peso, il quale ſi riferisce alla retta OQ come all'*aſſe de' momenti*, riſulta per le dottrine della Statica il momento della preſſione elementare con moltiplicare queſta per la diſtanza EO dall'aſſe de' momenti. Preſa dunque ſulla linea delle aſciſſe la $ME = x$, l'ordinata $EC = y$, $MN = a$, l'angolo delle coordinate ovvero $ENO = \varphi$, l'inclinazione del piano all'orizzonte, ciſia l'angolo $EOR = \omega$, ſi ottiene $EO = (a + x)$ ſen. φ, $ER = (a + x) \times$ ſen. φ ſen. ω, $CDdc = 2ydx$. ſen. φ. Laonde il momento della preſſione elementare trovaſi $= 2ydx(a + x)^2$ ſen. ω ſen.^{3} φ; e quindi la ſomma de' momenti delle preſſioni nell'area indefinita $ABDC$ ſarà $= \int 2ydx(a + x)^2$ſen.$\omega \times$ ſen.^{3} φ. Una tal ſomma per le dottrine della Statica debb' eſſere uguale al momento, che ha tutta la preſſione eſercitata contro l'area medeſima $ABDC$, qualora eſſa preſſione ſi concepisca concentrata e raccolta nel centro di preſſione, e riferita all'iſteſſo aſſe OQ. Perciò eſſendo tutta la preſſione contra l'area indefinita $= \int 2ydx(a + x)$ ſen. ω ſen.^{2} φ, ſe ſi chiama Δ la diſtanza del centro di preſſione dall' aſſe

de'

de' momenti si avrà l'ugualtà $\int 2ydx\,(a+x)^2 \times$ sen. ω sen.^{3} φ $= \Delta \int 2ydx\,(a+x)$ sen. ω sen.^{2} φ, e conseguentemente $\Delta = \frac{\int ydx\,(a+x)^2 \text{ sen. } \varphi}{\int ydx\,(a+x)}$. Ritrovata per tal modo la distanza del centro di pressione dall' asse de' momenti, ed essendo altronde evidente, che non può il detto centro uscire dalla linea delle ascisse MI, la quale divide per ipotesi il dato piano in due parti simili, ed uguali, resterà in conseguenza determinata la posizione del centro di pressione. Il che era ec.

43. Supposte le ordinate ortogonali, cioè $\varphi = 90°$, ed oltracciò $a = o$, il valore di Δ si trasforma in quest' altro più semplice $\frac{\int yx^2dx}{\int yxdx}$.

44. *Esempio* I. Cercasi il centro di pressione nel parallelogrammo $ABGF$ (Fig. 20) nell' ipotesi, che il suo lato superiore AB sia nel pian di livello. Dicasi $ME = x$, $CE = AM = y = b$, $MI = c$. Si avrà per l' area indefinita $ACDB$ il valore di $\Delta = \frac{\int bx^2dx \text{ sen. } \varphi}{\int bxdx} = \frac{\frac{1}{3}bx^3 \text{ sen. } \varphi}{\frac{1}{2}bx^2} = \frac{2}{3}x$ sen. φ, e per tutto il parallelogrammo $FABG$ si avrà $\Delta = \frac{2}{3}c$ sen. φ, cioè il centro P di pressione si trova a due terzi di MI contando da M, posciachè MP è $= \frac{2}{3}MI$.

Nel parallelogrammo $QABR$, la di cui base

base passa per P centro di pressione del dato, trovasi del pari il centro di pressione in O a due terzi di MP, cioè a quattro noni di MI, essendo $MO = \frac{2}{3}MP = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}MI = \frac{4}{9}MI$. La distanza OP de' due centri di pressione O, P è $= \frac{2}{9}\, MI$.

Volendosi poi il centro di pressione nel parallelogrammo $FQRG$, il di cui lato superiore QR passa pel centro di pressione del dato $FABG$, convien ricorrere alla formola $\frac{\int y\,(a + x)^2 dx \text{ sen. } \varphi}{\int y\,(a + x)\,dx}$, e porre $a = MP = \frac{2}{3}c$, donde si raccoglie $\Delta = \frac{\int b\,(\frac{2}{3}c + x)^2 dx \text{ sen. } \varphi}{\int b\,(\frac{2}{3}c + x)\,dx}$

$$= \frac{(\frac{4}{9}c^2x + \frac{2}{3}cx^2 + \frac{1}{3}x^3)\text{ sen. } \varphi}{\frac{2}{3}cx + \frac{1}{2}x^2} =$$

$\frac{\frac{2}{3}(4c^2 + 6cx + 3x^2)\text{ sen. } \varphi}{4c + 3x}$. E perciò posto $x = PI = \frac{1}{3}c$, risulta $\Delta =$

$$\frac{\frac{2}{9}\text{ sen. } \varphi\,(4c^2 + 2c^2 + \frac{1}{3}c^2)}{4c + c} =$$

$\frac{2}{3}.\frac{19\,c\text{ sen. } \varphi}{15} = \frac{38}{45}c.\text{sen. } \varphi$; e in conseguenza il centro U di pressione del parallelogrammo QG è situato ai $\frac{38}{45}$ della retta MI, contando da M. Di qui si deduce, che PU è $= \frac{8}{15}\, PI$.

Stan-

Stando ſempre a queſt' eſempio, egli è manifeſto, che eſſendo nel parallelogrammo AG il centro di preſſione in P, e però uguali i momenti intorno a P, rimarrà fiſſo ed immobile il parallelogrammo qualora ſia puntellato in P.

Se ſi coſtruirà una cataratta parallelogramma AG avente i lati AB, FG orizzontali, e queſta mobile intorno a due aſſi piantati in Q ed in R, eſtremità della orizzontale QR, la quale paſſa per P ai due terzi di MI, la cataratta rimarrà chiuſa tutte le volte, che l'acqua aſcenderà ſino al lato ſuperiore AB; il che è manifeſto dalle coſe precedenti: per lo contrario ella ſi aprirà rotandoſi intorno agli aſſi Q ed R tanto ſe l'acqua non arriverà ſino in AB, quanto ſe oltrepaſſerà AB. Imperciocchè ſe l'acqua reſta al di ſotto di AB, per eſempio in CD, il centro di preſſione del parallelogrammo CG trovaſi ai due terzi di EI, come P è ai due terzi di MI; è però il predetto centro di preſſione caſca al di ſotto di P: onde avviene, che la cataratta per la ſpinta dell' acqua è coſtretta a rotarſi intorno ai due aſſi, la parte inferiore QG volgendoſi dal di dentro al di fuori, e la ſuperiore QB dal di fuori al di dentro per riguardo al luogo occupato dall' acqua. Che ſe l'acqua oltrepaſſa AB, e giugne ſino in K, allora ricorrendo alla formola

ſ

$\frac{\int y(a+x)^2 dx \text{ sen. } \varphi}{\int y(a+x)\,dx}$, e posto $KM = a$, $y = b$, si ottiene $\Delta = \frac{\int (a+x)^2 dx \text{ sen. } \varphi}{\int (a+x)\,dx} = \frac{(a^2 + ax + \frac{1}{3}x^2) \text{ sen. } \varphi}{a + \frac{1}{2}x}$, e fatto $x = c$, si ha $\Delta = \frac{(a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2) \text{ sen. } \varphi}{a + \frac{1}{2}c}$. Laonde se O è il centro di pressione della cataratta AG in questa ipotesi, sarà $KO = \frac{a \quad + ac + \frac{1}{3}c^2}{a + \frac{1}{2}c}$, valore manifestamente minore di $a + \frac{2}{3}c$, vale a dire di KP. Dunque il centro di pressione della cataratta in questo caso casca al di sopra di P, e conseguentemente l' urto dell' acqua obbliga la cataratta ad aprirsi, e a volgersi intorno agli assi, movendosi in fuori la parte superiore QB, e in dentro l' inferiore QG.

45 *Esempio* II. Si vuol sapere il centro di pressione nel piano triangolare FMG (*Fig.* 21) situato colla base orizzontale all' ingiù. Essendo in questo caso $CE = y = \frac{bx}{c}$, si sostituisce questo valore nella formola $\frac{\int y(a+x)^2 dx \text{ sen. } \varphi}{\int y(a+x)\,dx}$, e si ottiene $\Delta = \frac{\int (a+x)^2 x dx \text{ sen. } \varphi}{\int (a+x)\,x dx} =$

($\frac{1}{2}$

$\frac{(\frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{1}{4}x^2)\text{ sen. }\varphi}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}x} =$

$\frac{(6a^2 + 8ax + 3x^2)\text{ sen. }\varphi}{6a + 4x}$, e fatto $x = c$ $= MI$, si ha per tutto il piano triangolare FMG, $\Delta = \frac{(6a^2 + 8ac + 3c^2)\text{ sen. }\varphi}{6a + 4c}$.

Se il pian di livello passa pel vertice M del triangolo sicchè sia $MK = a = 0$, risulta $\Delta = \frac{3}{4}c\text{ sen. }\varphi$, il che indica, che in questo supposto il centro di pressione trovasi a tre quarti di MI contando d'alto in basso.

Situato il triangolo colla base orizzontale rivolta all'insù (*Fig.* 22.), e fatta $KM = a$, $MA = b$, $MI = c$, $ME = x$, $EC = y = \frac{b}{c}(c - x)$, la formola $\frac{\int y(a+x)^2 dx\text{ sen. }\varphi}{\int y(a+x)dx}$ diventa $\frac{\int (c-x)(a+x)^2 dx\text{ sen. }\varphi}{\int (c-x)(a+x)dx} =$

$\frac{\int (a^2c + 2acx - a^2x + cx^2 - 2ax^2 - x^3)dx\text{ sen. }\varphi}{\int (ca + cx - ax - x^2)dx} =$

$\frac{(a^2c + acx - \frac{1}{2}a^2x + \frac{1}{2}cx^2 - \frac{2}{3}ax^2 - \frac{1}{4}x^3)\text{ sen. }\varphi}{ca + \frac{1}{2}cx - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{3}x^2}$

$= \Delta$ per l'area indefinita $ACDB$. Quindi fatto $x = c$, si ha per tutto il triangolo AIB, $\Delta = \frac{(6a^2 + 4ac + c^2)\text{ sen. }\varphi}{6a + 2c}$; e se vuolsi, che l'acqua non ascenda oltre il lato superiore AB,

AB, ficchè fia $a = o$, nasce allora $\Delta = \frac{1}{2} c$ fen. φ, che è quanto dire, che il centro di preffione trovafi in tal cafo nel mezzo della retta *MI*.

46. *Efempio* III. Cercafi il centro di preffione nella parabola Apolloniana *CMD* (*Fig.* 23) fituata dentro il fluido colle ordinate all' affe orizzontali, e col vertice rivolto in alto. Chiamato p il parametro, y la *CE*, x la *ME*, fi ha $y = \sqrt{px}$, $\varphi = 90°$, $MK = a$. Laonde la formola $\frac{\int y(a+x)^2 dx \text{ fen. } \varphi}{\int y(a+x)dx}$ diventa

$$\frac{\int (a^2\sqrt{px} + 2ax\sqrt{px} + x^2\sqrt{px})dx}{\int (a\sqrt{px} + x\sqrt{px})dx} = \frac{\frac{2}{3}a^2x\sqrt{px} + \frac{4}{5}ax^2\sqrt{px} + \frac{2}{7}x^3\sqrt{px}}{\frac{2}{3}ax\sqrt{px} + \frac{2}{5}x^2\sqrt{px}} =$$

$$\frac{\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{5}ax + \frac{1}{7}x^2}{\frac{1}{3}a + \frac{1}{5}x} = \frac{35a^2 + 42ax + 15x^2}{35a + 21x}$$

$= \Delta$. Nel cafo, che l' acqua non oltrepaffi il vertice della parabola, ovvero che fia $a = o$, nafce $\Delta = \frac{30}{42} x = \frac{5}{7} x$; vale a dire il centro di preffione trovafi a cinque fettimi dell' afciffa *ME* contando dal vertice.

Ma se il piano parabolico fi capovolge, e rimanendo colle ordinate orizzontali fi riduce col vertice in giù (*Fig.* 24), allora pofta $MI = c$, $ME = x$, $CE = y$, l' equazione della parabola somminiftra $y = \sqrt{(pc - px)}$;

 ond'

ond'è, che surrogato questo valore nella formola nota, si deduce $\Delta = \frac{\int dx\,(a+x)^2 \sqrt{(pc-px)}}{\int dx\,(a+x)\sqrt{(pc-px)}}$. Per poter eseguire le integrazioni richieste, facciasi $\sqrt{pc-px} = z$, e si avrà $x = c - \frac{z^2}{p}$, $dx = -\frac{2zdz}{p}$, $a+x = a+c-\frac{z^2}{p}$. Perciò si ricava $\Delta = \frac{\int -z^2dz\left(a+c-\frac{z^2}{p}\right)^2}{\int -z^2dz\left(a+c-\frac{z^2}{p}\right)} =$

$$\frac{\frac{2}{5p}(a+c)z^5 - \frac{1}{3}(a+c)^2z^3 - \frac{1}{7p^2}z^7 + \text{cost.}}{\frac{1}{5p}z^5 - \frac{1}{3}(a+c)z^3 + \text{cost.}}$$

Laonde sostituendo in quest' espressione il valore di z, si ottiene $\Delta = \left(\frac{2}{5p}(a+c)(pc-px)^2 \times \sqrt{(pc-px)} - \frac{1}{3}(a+c)^2(pc-px) \times \sqrt{(pc-px)} - \frac{1}{7p^2}(pc-px)^3\sqrt{(pc-px)} + \text{cost.}\right) : \left(\frac{1}{5p}(pc-px)^2\sqrt{(pc-px)} - \frac{1}{3}(a+c)(pc-px)\sqrt{(pc-px)} + \text{cost.}\right)$.

Per determinare le costanti, avvertasi, che quando è $x = 0$ svanisce così l'integrale del numeratore, cioè la somma de' momenti, co-

me

me l'integrale del denominatore, cioè la somma delle pressioni. Conseguentemente la cost. del numeratore sarà $= \frac{1}{7} pc^3 \sqrt{pc} + \frac{1}{3} (a+c)^2 pc \times \sqrt{pc} - \frac{2}{5} (a+c) pc^2 \sqrt{pc}$, e la cost. del denominatore sarà parimente $= \frac{1}{3} (a+c) pc \sqrt{pc} - \frac{1}{5} pc^2 \sqrt{pc}$. Dunque $\Delta = \left(\frac{2}{5p} (a+c)(pc-px)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} (a+c)^2 (pc-px)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{7p^2} (pc-px)^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{7} pc^3 \sqrt{pc} + \frac{1}{3} (a+c)^2 pc \sqrt{pc} - \frac{2}{5} (a+c) \times pc^2 \sqrt{pc} \right) : \left(\frac{1}{5p} (pc-px)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} (a+c) \times (pc-px)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} (a+c) pc \sqrt{pc} - \frac{1}{5} pc^2 \sqrt{pc} \right)$, che dà il centro di pressione per lo spazio indefinito *ACDB*. Se pertanto in questa espressione si assume $x = c$ per avere il centro di pressione di tutto lo spazio definito *AIB*, si trova dopo le debite trasformazioni $\Delta =$

$$\frac{8c^2 + 35a^2 + 28ac}{35a + 14c}.$$

Da ciò s'inferisce, che qualora l'acqua non salga oltre l'ordinata *AM*, e però si abbia $a = 0$, il centro di pressione è situato a quattro settimi dell'ascissa definita *MI* contando dall'alto. Conseguentemente stando in questo supposto di $a = 0$, il centro di pressione nella Parabola diritta è d'un quarto più distante dal pian di livello, che nella Parabola rivoltata.

SEZIONE II.

Dell' equilibrio de' fluidi e corpi immersi.

TEOREMA IV.

47. *Dalla pressione, che esercita l'acqua su tutti i punti d'un vaso di qualunque forma, dove è contenuta, risulta una pressione verticale all'ingiù uguale precisamente al peso dell' acqua contenuta.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 26. Rappresentando $AESB$ (Fig. 26.) la sezione verticale del vaso, si guidino le rette verticali infinitamente prossime MX, UE; e nel trapezio $MXEU$ i latercoli MU, XE saranno premuti dall' acqua colle forze espresse dalle rette MN, EI perpendicolari ai latercoli. Se pertanto si chiama A l'altezza del livello AB sopra EX, a l'altezza sopra MU, g la gravità specifica dell'acqua, nascerà la pressione $MN = ga.MU$, e la pressione $EI = gA.EX$. Risolvasi la forza MN nelle due MP orizzontale, ed MR verticale tendente all'insù;

e

e parimente la forza EI nelle due EL orizzontale, ed EG verticale tendente all' ingiù. La ſimilitudine de' triangoli MNR, PMU, ed IEG, QEX somminiſtra le seguenti analogie $MU : MP :: MN : MR$, $EX : EQ :: EI : EG$, dalle quali ſi raccoglie $MR = ga.MP$, $EG = gA.EQ$. Dunque dalla preſſione MN contro il latercolo MU risulta una preſſione verticale all' insù, che ha per misura $ga.MP$, e dalla preſſione EI contro il latercolo EX risulta una preſſione verticale all' ingiù espreſſa da $gA.EQ$, ovvero $gA.MP$; e da queſta togliendo la prima, che le è direttamente contraria, nascerà la preſſione verticale all' ingiù ne' due lati inſieme EX, MU rappresentata da $g(A - a).MP$, cioè dall' area del trapezio $MUEX$, ovvero del rettangolo $MPEQ$, moltiplicata per la gravità specifica dell' acqua, che è quanto dire dal peso dell' acqua contenuta in detto trapezio. E collo ſteſſo discorso ſi moſtrerà, che ciascuna coppia di latercoli della superficie interna del vaso è premuta verticalmente all' ingiù con una forza, che corrisponde appunto al peso dell' acqua contenuta nel trapezio verticale serrato fra i detti latercoli. Conseguentemente tutta la superficie interna del vaso soffre una preſſione verticale all' ingiù, che uguaglia precisamente il peso dell' acqua premente. Il che era ec.

48. Di qui ſi capisce, perchè i vaſi con-

vergenti, sebbene soffrano nel loro fondo una pressione tanto maggiore del peso dell' acqua contenuta, e i divergenti una tanto minore, posti però sulla bilancia o stadera si trovino nè più nè meno di quel peso, che corrisponde all' acqua premente, e alla materia del vaso.

TEOREMA V.

49. *Un solido interamente immerso in un fluido omogeneo a qualunque profondità è spinto dal fluido verticalmente all' insù con tanta forza, quanto è il peso d' un volume di fluido uguale al volume del solido.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 26. Rappresenti la stessa Fig. 26. una sezione verticale del solido, e fatto il resto come dianzi, i latercoli MU, EX sono premuti esteriormente dall' acqua nelle direzioni normali NM, IE, e con forze espresse da queste rette, dalle quali risultano le pressioni verticali RM, e GE, la prima tendente all' ingiù, l' altra all' insù, come è visibile. Quindi ritenute le denominazioni di prima si ha per la spinta risultante all' insù ne' due latercoli insieme la forza $EG - MR = g(A - a).EQ$, vale a dire al peso di tant'acqua, quanta contiensi nel rettangolo $MPEQ$, ossia nel trapezio $MUEX$. Di qui si fa manifesto, che dalla pressione esterna del fluido contro tutti i punti

della

della superficie del solido risulta una spinta verticale all'insù uguale al peso d'un volume di fluido pari al volume del solido. Il che era ec.

COROLLARIO I.

50. Poichè lo sforzo verticale del fluido, che tende a sollevare il solido immerso, equivale al peso d'un volume di fluido pari al volume del solido, questo perderà tanto del suo peso, quanto è quello del fluido sotto lo stesso volume.

COROLLARIO II.

51. Se sono uguali le specifiche gravità del fluido e del solido, questo s'immerge tutto nel fluido, ma riman quieto nel luogo, dove da prima vien collocato.

COROLLARIO III.

52. Se la gravità specifica del solido supera quella del fluido, il solido discende continuamente nel fluido coll'eccesso del suo peso sopra quello del fluido sotto lo stesso volume;

COROLLARIO IV.

53. Se la gravità specifica del solido è minore di quella del fluido, il solido soprannuota o galleggia, e si solleva di tanto, che il volume di fluido corrispondente alla parte sommersa non pesi nè più, nè meno di tutto il solido.

COROLLARIO V.

54. In quest' ultima ipotesi il volume del solido e quello della parte sommersa sono in ragione inversa della gravità specifica del solido, e di quella del fluido: giacchè chiamando G, V la gravità specifica, e il volume del solido, e g, v la gravità specifica del fluido, e il volume della parte immersa, dall'equazione $GV = gv$ si ha la seguente analogia $V : v :: g : G$.

COROLLARIO VI.

55. Le parti sommerse del medesimo solido in diversi fluidi di maggiore specifica gravità sono in ragione inversa delle gravità specifiche de' fluidi. Di qui l' uso dell'*Areometro*, o *Pesaliquori*.

COROLLARIO VII.

56. Le perdite di peso, che soffre un solido immerso in diversi fluidi di minore specifica gravità, sono in ragione delle gravità specifiche de' fluidi. Di qui il noto metodo utilissimo di esplorare, e conoscere la specifica gravità di ogni sorte di fluido.

COROLLARIO VIII.

57. Un vaso, o altro corpo cavo, che col mezzo di varj pesi, che vi si gettano dentro

tto o si estraggono, si fa immergere in differenti fluidi sempre alla medesima profondità, manifesta ne' diversi pesi di tutto il composto la ragione delle specifiche gravità de' fluidi. Di qui il metodo di LEUTMANN per conoscerle (a).

COROLLARIO IX.

58. L'aria, come fluido pesante, diminuisce ancor essa una parte del peso di tutti i corpi, e il peso, che questi hanno nell'aria, non è il loro peso reale. Essendo però l'aria un fluido rarissimo, cioè circa 850 volte più raro dell'acqua, ci possiamo dispensare di tener conto della diminuzione, che esso cagiona.

COROLLARIO X.

59. Due corpi di diversa specifica gravità, che si fanno equilibrio nell'aria, non mantengono più l'equilibrio se si immergono in un fluido più denso dell'aria, perdendo quivi una maggior parte di peso il corpo più voluminoso, cioè di minore specifica gravità. Quindi se si avrà da comprare dell'Oro sarà bene scegliere il tempo dell'aria più leggiera, ovvero dello stato più basso del Barometro, avvegnacchè l'Oro è specificamente più grave de' contrappesi d'Ottone: e se per l'opposto si vorrà comprare

(a) Comm. Acad. Sc. Petrop. T. V. p. 273.

re delle Pietre preziose, tornerà a conto di farlo in tempo d'aria più pesante, cioè nello ſtato più alto del Barometro. Ma per l'appunto al contrario dovrà attenerſi chi avrà da vendere Oro, o Pietre preziose.

COROLLARIO XI.

60. Dato il peso p di un corpo, e la sua gravità specifica g maggiore di quella d'un fluido, la quale ſia nota, ed $= g''$, ſi potrà sempre trovare in un'altra materia di data gravità specifica g' un tal peso x, che unito al peso p risulti un tutto, la di cui specifica gravità ſtia a quella del fluido in data ragione $m : n$. Imperciocchè eſſendo il volume del primo corpo $\frac{p}{g}$, il volume del secondo $\frac{x}{g'}$, e il volume del compoſto $\frac{p}{g} + \frac{x}{g'}$, sarà il peso del fluido sotto un tal volume $= \left(\frac{p}{g} + \frac{x}{g'}\right)g''$ $= \frac{g''}{gg'}(pg' + gx)$. Chepperò ſi farà $p + x :$ $\frac{g''}{gg'}(pg' + gx) :: m : n$, cioè $npgg' + ngg'x = mpg'g'' + mgg''x$, e per ultimo $x = \frac{pg'(ng - mg'')}{g(mg'' - ng')}$.

Se a cagion d'esempio ſi fa il peso del corpo umano $p = 150$ libb., e le gravi-

tà

tà specifiche dell' uomo, dell' acqua, e del sughero come 10, 9, $2\frac{1}{4}$, cioè $g = 10$, $g' = 2\frac{1}{4}$, $g'' = 9$, e si vuol sapere quante libbre di sughero debba un uomo adattarsi alla vita per equilibrarsi coll' acqua, in tal ipotesi, essendo $m = n$, si ricava $x =$

$$\frac{pg'(g - g'')}{g(g'' - g')} = \frac{150 \cdot 2\frac{1}{4}(10 - 9)}{10(9 - 2\frac{1}{4})} = \frac{675}{135} = 5 \text{ libb.}$$

Di qui l' arte di nuotare, e l' invenzione dello *Scafandro*; intorno a cui può vedersi il libretto del Sig. Ab. CHAPELLE.

COROLLARIO XII.

61. Dato il peso assoluto p, e la gravità specifica g d' un Misto formato dall' unione di due ingredienti, de' quali sono note le gravità specifiche g', g'', e supposto, che la mescolanza si faccia senza rarefazione come senza addensamento di parti, sicchè il volume del misto si agguagli alla somma de' volumi degl' ingredienti, si trova subito il peso di ciascun componente. Imperciocchè chiamato x il peso d' un ingrediente, e però $p - x$ il peso dell' altro, sarà $\frac{x}{g'} + \frac{p - x}{g''}$ la somma de' loro volumi, e $\frac{p}{g}$ il volume del Misto. Quindi si avrà l' equa-

quazione $\frac{x}{g'} + \frac{p-x}{g''} = \frac{p}{g}$, cioè $x = \frac{pg'(g-g'')}{g(g'-g'')}$, e $p - x = \frac{pg''(g'-g)}{g(g'-g'')}$.

Supponendo per esempio, che i due ingredienti sieno oro, ed argento, e le gravità specifiche g, g', g'' del Misto, dell' oro, e dell' argento come 17, 19, $10\frac{1}{3}$, e posto di 5 libbre il peso del Misto, trovasi il peso

dell' oro $= \frac{5 \cdot 19 \cdot 6\frac{2}{3}}{17 \cdot 8\frac{2}{3}} = \frac{1900}{442} = 4\frac{66}{221}$ libb.,

e il peso dell' argento $= \frac{155}{221}$ libb.

Se gl' ingredienti sono più di due, il Problema è indeterminato.

Di qui l'arte di conoscere le monete false e adulterate; e di qui il ripiego, di cui può essersi servito ARCHIMEDE per discoprire la frode dell'Artefice nella Corona del Re Ierone (*b*).

COROLLARIO XIII.

62. Siccome può estendersi ad arbitrio il volume di un corpo, restando lo stesso il suo peso assoluto, perciò non vi ha materia tanto pesante, che non si possa far galleggiare nell'acqua. E se, dato il peso assoluto p d'una certa materia da ridursi alla forma d'un corpo cavo

(*b*) Vitruv. Lib. IX. Cap. 3.

cavo, la specifica gravità del quale ſtia alla nota g dell' acqua in una data ragione $m : n$, ſi dimanda il volume x, in cui dovrà dilatarſi la data materia, ſi avrà toſtamente $m : n :: \frac{p}{x} : g$, e quindi $x = \frac{np}{mg}$.

Si vuole a cagion d' esempio formare una palla cava d' ottone del peso di 10 libbre, e della metà della gravità specifica dell' acqua. Eſſendo in queſto caso $m = 1$, $n = 2$, $p = 10$ libb., $g = \frac{70 \text{ libb.}}{1 \text{ pied. cub.}}$, ſi ha $x = \frac{20 \text{ libb.} \times 1 \text{ pied. cub.}}{70 \text{ libb.}} = \frac{2}{7}$ pied. cub. $= 0,2857$.

Ritrovato il volume x, per determinare il semidiametro r della palla, baſta aſſumere $1 : \pi$ pel rapporto del diametro alla periferia circolare, d' onde ſi ricava il volume x della palla $= \frac{4}{3}\pi r^3$, e però $r = \sqrt[3]{\frac{3x}{4\pi}}$.

Ecco il calcolo numerico.

log. 3	0,4771213
log. x	9,4559102
log. $3x$	9,9330315
log. 4	0,6020600
log. π	0,4971499
log. 4π	1,0992099
log. $\frac{3x}{4\pi}$	8,8338216

log.

log. $\sqrt[3]{\frac{3x}{4\pi}}$	. . . .	9,6112738

Dunque $r = \sqrt[3]{\frac{3x}{4\pi}} = 0,4086$.

Per rinvenire poi anche la grossezza della crosta metallica, dicasi r' il semidiametro dell'interna cavità della palla, ed una tal cavità sarà $\frac{4}{3}\pi r'^3$, e conseguentemente il volume della crosta $= \frac{4}{3}\pi(r^3 - r'^3)$: onde supposta la gravità specifica dell'Ottone 8,349 volte maggiore di quella dell'acqua, cioè $= 8,349g$, ne viene $\frac{4}{3}\pi(r^3 - r'^3) = \frac{p}{8,349g}$, e conseguentemente $r' = \sqrt[3]{\left(r^3 - \frac{p}{11,132\pi g}\right)}$.

Si ha pertanto

log. r^3	. . . .	8,8338216
log. p	. . . .	1,0000000
log. 11,132	. . . .	1,0465732
log. π	. . . .	0,4971499
log. g	. . . .	1,8450980
log. $11,132\pi g$	. . . . . .	3,3888211
log. $\frac{p}{11,132\pi g}$	. . . .	7,6111789
r^3	. . . .	0,0682
$\frac{p}{11,132\pi g}$	. . . .	0,00408
$r^3 - \frac{p}{11,132\pi g}$	. . . . . .	0,06412

log.

$\log.\left(r^3 - \frac{p}{11,1\,3\,2\pi g}\right)$ . . . 8,8069935

$\log.\sqrt[3]{\left(r^3 - \frac{p}{11,1\,3\,2\pi g}\right)}$ 9,6023312

Dunque $r' = 0,40025$; e conseguentemente la grossezza della crosta, cioè $r - r' = 0,00835$.

COROLLARIO XIV.

63. Allorchè si diminuisce il peso d'un corpo immerso in un fluido senza alterarne il volume, si assoggetta con ciò ad ubbidire alla spinta verticale del fluido, che tende a sollevarlo: ond'è, che si può con sommo vantaggio impiegare la spinta verticale dell'acqua per cavare dal fondo del mare, e dei fiumi delle masse pesantissime, che vi si trovano infangate, con attaccarle a de' battelli sprofondati dal carico di corpi pesanti, che successivamente si scaricano e alleggeriscono.

PROBLEMA VIII.

64. *Un recipiente contiene due sorti di liquori, uno più pesante verso il fondo, l'altro più leggiero superiormente: un solido specificamente più grave del secondo, e meno grave del primo liquore si getta nel recipiente: si dimanda quanto s' immergerà nel fluido inferiore.*

SOLUZIONE.

Si denominino g, g', g'' le gravità specifiche del fluido inferiore, del solido, e del fluido su-

pe-

periore, v il volume del solido, x quello della parte sommersa, che si vuol ritrovare. Sarà dunque $v - x$ il volume della parte sommersa nel fluido superiore, $g''(v - x)$ il peso d' un pari volume di questo fluido, gx il peso d' un volume del fluido inferiore uguale al volume della parte immersa x, e finalmente $g'v$ il peso del solido.

Dovendo pertanto quest' ultimo peso aggguagliare la somma degli altri due, da' quali trovasi contrabbilanciato, si ha l' equazione $g'v = gx + g''v - g''x$, cioè $x = \frac{(g' - g'')v}{g - g''}$. Il che era ec.

COROLLARIO.

65. Dal valore di $v - x = \frac{(g - g')v}{g - g''}$ confrontato con quello di x si raccoglie, che le parti del solido coperte dai due fluidi sono in ragione inversa delle differenze fra le gravità specifiche del solido, e del fluido relativo alla parte sommersa.

PROBLEMA IX.

66. *In una sfera cava, composta di materia omogenea, e galleggiante in un fluido, assumendo per date alcune quantità si cercano le altre.*

SOLUZIONE.

Si dica r il semidiametro della sfera, r' quel-

quello della cavità, s la saetta del segmento sferico immerso nel fluido, $n : 1$ il rapporto della gravità specifica della materia componente la sfera alla specifica gravità del fluido. Ora preso al solito $1 : \pi$ per denotare la ragione del diametro alla circonferenza circolare si ha $\frac{4}{3}\pi(r^3 - r'^3)$ pel volume della materia componente la sfera, e $\pi s^2(r - \frac{1}{3}s)$ pel volume della parte sommersa, cioè pel volume d'acqua di ugual peso alla sfera. E perchè i volumi de' corpi di ugual peso sono in ragione inversa delle loro specifiche gravità, nasce l'analogia $\frac{4}{3}\pi(r^3 - r'^3) : \pi s^2(r - \frac{1}{3}s) :: 4(r^3 - r'^3) : s^2(3r - s) :: 1 : n$, e da questa l'equazione $4nr^3 - 4nr'^3 = 3rs^2 - s^3$. Quindi derivano i tre casi seguenti.

I.

Si cerca il semidiametro r' della cavità, dato il resto.

SOLUZIONE.

$$r' = \sqrt[3]{\left(r^3 + \frac{s^3 - 3rs^2}{4n}\right)}$$

II.

Si cerca il rapporto $n : 1$ delle gravità specifiche.

SOLUZIONE.

$$n = \frac{3rs^2 - s^3}{4r^3 - 4r'^3}.$$

III.

Si dimanda il ſemidiametro r della sfera.

SOLUZIONE.

$$r^3 \; * \; - \frac{3s^2r}{4n} + \frac{s^3}{4n} = 0$$
$$- r'^3$$

IV.

Si vuol ſapere la ſaetta s del ſegmento ſommerſo.

SOLUZIONE.

$$s^3 - 3rs^2 \; * \; \begin{matrix} + 4nr^3 \\ - 4nr'^3 \end{matrix} = 0$$

Il che era ec.

PAR-

PARTE SECONDA

SEZIONE I.

Considerazioni Generali sopra il moto dell' Acqua ne' vasi, e tubi.

67. Qualunque sia il moto, che un corpo solido può concepire, siccome tutti i suoi punti, o particelle componenti conservano sempre la medesima situazione fra loro, basta conoscere il moto di tre sole per conoscere quello di tutte le altre: così insegna la Meccanica. Ma ne' Fluidi la cosa procede affatto diversamente: poichè le molecole del fluido non avendo fra loro sensibile coerenza, può ciascuna di esse avere un moto proprio e particolare diverso da tutte le altre; e però quand' anche si conosca il moto di alcune particelle del fluido, non per questo si fa noto il moto delle altre. Di qui si può anticipatamente inferire, che le ricerche generali intorno al movimento de' fluidi condur debbano necessariamente a calcoli complicatissimi e bene spesso intrattabili. Svanisce nonpertanto una parte di queste difficoltà, e più maneg-

gevoli riescono i calcoli, qualora si concepisce il fluido contenuto in vasi o canali, lungo i quali o scorre perennemente, o esce per una data apertura; avvegnachè allora viene prescritto al fluido il cammino, che dee fare, e solo trattasi di ritrovare la sua velocità. Ma anche in questo caso particolare il più delle volte è mestieri di assumere dati, ed ipotesi, che si allontanano un tal poco dalla natura, e ciò ad effetto di ottenere de' risultati, i quali non troppo discordino col fatto e coll' esperienza.

68 Prima di entrare in questa delicata ricerca, convien farsi un' idèa chiara di ciò che succede ad una massa d'acqua contenuta in un vaso allorchè le si concede per un' apertura l' uscita. Sia dunque un vaso *FMNG* (*Fig.* 27), che abbia la figura d' un cilindro, o prisma retto. Il fondo *MN* del vaso sia orizzontale, e in conseguenza parallelo alla superficie *FG* dell' acqua stagnante. Nel mezzo del fondo s' immagini l' apertura, o il foro *BE*, che possa a piacere chiudersi, e riaprirsi. Ciò posto, se si apre il foro, o la luce *BE*, l' esperienza insegna, che l' acqua si scaglia con impeto dall' apertura, sempre seguita dall' altr' acqua del vaso, e che per tal movimento abbassandosi la superficie *FG* questa si mantien sempre piana ed orizzontale purchè sia assai picciola l' apertura *BE* in paragone della larghezza del vaso. Che se la detta apertura non è picciola

ciola quanto basta, nasce dirittamente sopra di lei nella superficie *FG* un avvallamento, o cavità tanto più considerabile, quanto più grande è il lume *BE*. Siffatto incavo, quand' anche sia abbastanza picciolo il foro, nasce pur anco allorchè l' acqua è per la maggior parte smaltita, ed *FG* assai vicina al fondo *MN*. Posta ora da parte quest' anomalia, si potrà stabilire per dato certo, che tutti i punti della superficie suprema *FG* dell' acqua discendono verticalmente colla medesima velocità. Ed è poi chiaro, doversi ciò verificare di tutte le molecole d' acqua, che occupano qualunque altra sezione orizzontale *PH*, purchè non sia troppo vicina al fondo *MN*. Quindi come ne' corpi solidi, quando tutti i loro punti si muovono per direzioni parallele colla medesima velocità, così nella sezione *PH* per conoscere il moto di tutte le molecole, che la compongono, basterà conoscer quello del suo centro di gravità *A*.

69. Essendo il vaso un prisma retto, o un cilindro retto, i centri di gravità *R*, *r*, *A*, *a*, &c. di tutte le sezioni orizzontali dell' acqua formano una linea retta, e verticale: e se il foro *BE* è nel mezzo del fondo, e il suo centro di gravità *Q* coincide con quello del fondo, la linea *RrAaQq* dei centri di gravità di tutte le sezioni orizzontali dell' intero corpo d' acqua *FMBbeENG* è una retta continua verticale, e in conseguenza perpendicolare alle

dette fezioni. Questa linea, che dicesi la *linea centrale* di tutta la massa d'acqua in movimento, rappresenta la direzione del moto delle sezioni orizzontali, movendosi tutti i loro punti per direzioni parallele a detta linea. Prescindendo pertanto da ciò, che accade alle sezioni affatto vicine al fondo, è di per se evidente, che tutte le sezioni dell' acqna del vaso discendono in ogn' istante con uguali velocità. Considerando inoltre la sezione qualunque PH, ed insieme quella del lume BE, se in un tempetto infinitesimo BE discende in be, e in quello stesso istante PH si abbassa per esempio in ph, il volume d'acqua $BbeE$, che esce in tal momento, debb' essere uguale al volume $PphH$. Ciò posto, si ha il

TEOREMA I.

70. *La velocità dell' acqua uscente pel foro* BE *sta alla velocità dell' acqua scorrente per una qualunque sezione* PH *come sta reciprocamente l' area della sezione all' area del foro.*

DIMOSTRAZIONE.

Poichè si ha $BbeE = PphH$, vale a dire $BE \cdot Qq = PH \cdot Aa$, starà perciò $Qq : Aa :: PH : BE$; ed essendo Qq, Aa gli spazj descritti nel medesimo istante dalle sezioni BE, PH, delle quali conseguentemente rappresentano le velocità, si dedurrà quindi, che

la

la velocità in BE ſta alla velocità in PH come ſta PH a BE. Il che era ec.

71. Se vuolſi conſiderare la cosa più in generale, e in vece del vaso cilindrico o prismatico $FMNG$, ſi conſidera un vaso di qualunque forma (come rappresenta la Fig. 28.), ma però tale, che le sue sezioni orizzontali PH comunque disuguali abbiano i loro rispettivi centri di gravità diſpoſti nella medeſima retta verticale RAQ, la quale paſſi altresì pel centro di gravità della luce BE; allora la sezione PH diventa una grandezza variabile, che può riguardarſi come una funzione dell' altezza RA; e le velocità dell' acqua per le differenti sezioni non sono più eguali tra loro, ma disuguali. In queſto più generale suppoſto non può più ammetterſi come vero il principio (68), che tutte le particelle d'acqua d'una ſteſſa sezione ſi muovano colla *medeſima velocità*, *e con direzioni parallele*: avvegnachè le particelle ne' confini della sezione, e contigue alle pareti del vaso debbono neceſſariamente seguirne la direzione, ſtrisciando sopra i latercoli Pp, Hh, i quali non sono punto paralleli alla linea centrale RAQ; e ciò non può che produrre una qualche alterazione nel moto verticale delle particelle vicine. Siccome però in una qualunque sezione il numero delle molecole, che toccano le pareti, è infinitamente minore del numero delle altre nella ſteſſa sezione, sembra poterſi ammettere

Fig. 28.

senza tema di errore notabile, che la predetta alterazione sia come nulla, e che tutti i punti d'una stessa sezione si muovano colla medesima velocità. Anche in quest'ipotesi più generale si ha il seguente

TEOREMA II.

72. *Comunque sieno ineguali le sezioni orizzontali* Fig. 28. *del vaso* FMNG (Fig. 28.), *purchè sia verticale la linea centrale* RAQ; *le velocità dell'acqua per due differenti sezioni stanno fra loro in ragione reciproca delle sezioni.*

DIMOSTRAZIONE.

In quell'istante di tempo, che l'acqua uscendo dall'orifizio BE riempie lo spazio $BbeE$, la sezione PH discende verticalmente in ph per modo che risulta $BbeE = PphH$, cioè $PH . Aa = BE . Qq$, e quindi $Qq : Aa :: PH : BE$, ossia la velocità per l'orifizio BE alla velocità per la sezione PH, come la sezione PH all'orifizio BE, e così parimente la velocità per l'orifizio BE alla velocità per la sezione IO, come la sezione IO all'orifizio BE. Dunque le velocità per le due differenti sezioni PH, IO sono in ragione inversa di quelle. Il che era ec.

73. Per dare una ancor maggiore generalità alle precedenti ricerche, prescindasi affatto dall'ipotesi, che *la linea centrale sia verticale*, e suppongasi solo, che ella sia *perpendicola-*

re

te a tutte le sezioni, e che *tutte le particelle d'acqua d'una stessa sezione si muovano parallelamente alla linea centrale*. Sia dunque un vaso, o tubo ricurvo (Fig. 29.) *ANPFTB*, e la linea *ICDE*, che passa per tutti i centri di gravità delle sezioni *AB*, *NT*, *PF* comunque inclinate all'orizzonte, sia ad esse perpendicolare; e supponghasi inoltre, che tutte le particelle di una stessa sezione si muovano con pari velocità e per direzioni parallele alla linea centrale. Queste due ipotesi del parallelismo del moto delle sezioni alla linea centrale, allorchè questa non è verticale, e della loro perpendicolarità ad essa linea, non possono aver luogo ne' canali ricurvi se non nel caso, che sieno molto ristretti, osservandosi allora, che postasi l'acqua in movimento la sezione suprema *AB* dalla situazione orizzontale, che ella ha sempre nello stato di quiete, passa a conformarsi perpendicolarmente intorno alla linea centrale *ICE*, vale a dire perpendicolarmente alla sua tangente in *I*. Supposta pertanto la linea centrale non verticale, convien supporre altresì il canale molto angusto, perchè possa verificarsi il

Fig. 29.

TEOREMA III.

74. *Quand' anche la linea centrale non sia verticale, purchè le sezioni d'acqua del canale si muovano parallelamente ad essa linea, e le siano tutte perpendicolari, le velocità dell' acqua in due qualunque sezioni sono in ragione inversa di quelle.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

La dimoſtrazione non è punto diverſa dalle due precedenti, purchè ſi oſſervi, che l'acqua non esce più ora verticalmente da *PF* ma per una direzione parallela alla tangente della linea centrale in *E*, e così pure la sezione *NT* non ſi avanza con moto verticale in *nt* in un iſtante di tempo, ma vi ſi porta per una direzione parallela alla tangente *CH* della linea centrale in *C*.

TEOREMA IV.

75. *Qualunque ſia la linea centrale, se gli ſtrati d'acqua del canale non saranno più perpendicolari ad eſſa linea, ma ſi moveranno però dovunque in direzione della medeſima: le velocità degli ſtrati ſaranno in ragion compoſta dell'inversa degli ſtrati medeſimi, e dell'inversa de' seni della loro inclinazione alla linea centrale.*

DIMOSTRAZIONE.

Si supponga che i due ſtrati, o sezioni *TV*, *HL* (*Fig.* 47) ſi avanzino nel medeſimo iſtante in *tv*, *hl*, movendoſi tutti i loro punti a seconda di *Zz*, *Gg* porzioncelle della linea centrale, e ciaſcun loro punto descrivendo ſpazietti uguali a *Zz*, *Gg*. Sarà pertanto il volumetto $TtvV = HhlL$; e condotta la perpendicolare *Zx* alle due sezioni *TV*, *tv*, che per la

Fig. 47.

pro-

proprietà del loro moto esser debbono parallele, e così pure guidata la perpendicolare Gr alle due sezioni HL, hl, sarà $TV . Zx = HL . Gr$, ovvero $TV . Zz$. sen . $VZz = HL . Gg \times$ sen. LGg. Laonde $Zz : Gg :: HL$. sen. LGg : TV. sen. VZz. Ma Zz, Gg essendo gli spazj precorsi nel medesimo istante da tutti i punti degli strati TV, HL, rappresentano le velocità di essi strati. Dunque queste velocità sono in ragion composta ec. Il che era ec.

76. Dopo tutte queste premesse, due sono i casi da considerarsi nella ricerca del movimento dell'acqua lungo i tubi, e vasi, da' quali sbocca per un dato orifizio.

Caso I.

Sgorgando l'acqua dal dato orifizio, o essa viene continuamente supplita mercè l'afflusso perenne di altrettant' acqua nella parte superiore del canale, per modo che la nuova acqua, che entra, non alteri il moto di quella, che sorte, e il vaso o canale si mantenga costantemente pieno: ovvero

Caso II.

L'acqua, che esce dall'apertura del tubo non è punto risarcita da altr' acqua, che entri, sicchè il vaso va successivamente vuotandosi.

77. Intanto premettiamo come un fatto noto per esperienza, che

Se

Se in un vaso costantemente pieno sbocca l'acqua da un' apertura fatta nel fondo, o nei lati, ella sorte fin quasi dal primo istante del moto con velocità sempre costante e invariabile.

Ciò è manifesto dall' osservarsi, che in tempo doppio si scarica due volte tanto d'acqua, in tempo triplo tre volte tanto, e che in generale le quantità dell' acqua, che sorte, sono proporzionali ai tempi della sortità. Non è già, che parlando con tutto rigore la velocità dell' acqua, che si scaglia dal lume d' un vaso, non vada successivamente accelerandosi dal primo istante del moto fino ad un certo tempo brevissimo, dopo il quale seguita poi sempre a mantenersi sensibilmente costante, ma per essere appunto un tal tempicciuolo estremamente picciolo, si vuol qui per ora prescinderne, e contemplare il moto dell' acqua già ridotto allo *stato permanente* o uniforme.

78. Ma se è costante la velocità dell' uscita, non è però tale la velocità lungo il vaso se non nell' ipotesi che questo sia di ugual larghezza in ogni sua parte; imperciocchè nel caso contrario varia la velocità al variare delle sezioni, e sempre in una ragione inversa di quelle. Ora egli è noto, che la velocità non può variare senza l' azione d' una forza acceleratrice, e questa forza è il risultato del peso di ciascuna particella, e quindi delle pressioni scambievoli delle une contro le altre, le quali forze se

si

si fanno tutte equilibrio nel fluido stagnante, o nello stato di quiete, non lo conservano più nello stato di moto. Nell' investigare pertanto le leggi, secondo le quali il moto dell'acqua si accelera, è necessario farsi una giusta idea della pressione, che l' acqua soffre in ciascun luogo del canale. Osservisi adunque, che se l'acqua precedente (Fig. 29.) *NPFT* si avanzasse con tanta celerità, con quanta viene inseguita dall' acqua posteriore *NTBA* per modo che l'acqua, che in questo momento è passata per *NT*, non recasse il minimo impedimento all'acqua immediatamente seguente, non potrebbe quindi risultarne alcuna pressione. Ma se all' opposto l' acqua, che in questo istante passa per *NT*, più lentamente si avanza di quello che sia inseguita dall' acqua posteriore, sicchè sfuggir non possa l' incontro e l' urto di questa, nasce allora una pressione dell' acqua posteriore contro *NT* in direzione perpendicolare ad *NT*, ed una contropressione dell' acqua anteriore contro la stessa *NT*, come pure per la natura del fluido una pressione contro le pareti del tubo in quel luogo in direzione ancor essa perpendicolare al luogo premuto delle pareti. Ciò premesso, passiamo ora al

Fig. 29.

PROBLEMA I.

79. *Cercasi la forza acceleratrice dell'elemento d'acqua* NntT *compreso fra le due sezioni* NT, nt *infinitamente prossime, e normali alla linea centrale.*

SO-

SOLUZIONE.

Pongasi la porzione indefinita IC della linea centrale $= s$; l'area della sezione $NT = z$, la quale sarà una funzione di s; la massa d'acqua $ANTB = M$; e il tempo trascorso dal principio del moto dell'acqua $= t$. Suppongasi, che l'elemento d'acqua $NntT = dM$ nel tempuscolo infinitesimo dt scorra uno spazietto $= Cc = ds$, movendosi tutte le particelle d'acqua di detto elemento con uguali velocità nella direzione della tangente CH. La forza acceleratrice, che fa variare la velocità dell'elemento nel giugnere da C in c, risulta in parte dal peso di lui, in parte dalla pressione contro di esso esercitata dall'acqua, che gli sta davanti e di dietro. Considerandosi infatti come un tutto da se la massa elementare $NntT$ si vede assai chiaro, che preme sopra NT la massa d'acqua posteriore $ANTB$, e sopra nt in direzione contraria preme la massa d'acqua anteriore $nPFt$. Se ora la pressione contro NT si concepisce uguale al peso d'una colonna d'acqua, che ha per base $NT = z$, e per altezza p, sicchè posta $= 1$ la gravità specifica dell'acqua, pz rappresenti una tal pressione, questa si trasmette ad nt, e diventa $= p.nt = p(z + dz)$. Per tal modo dalla pressione sopra NT risulta in nt una pressione rappresentata da $p(z + dz)$. Inoltre il peso dell'elemento $NntT$, cioè dM preme ancor esso sopra nt,

e

e perchè preme verticalmente all' ingiù, se si risolve questa pressione verticale in due, una perpendicolare ad nt, l' altra parallela e inoperosa, trovasi la prima $= dM . \cos. \varphi$, chiamando φ l' angolo composto dalla tangente CH, e dalla retta verticale CO. Tutta adunque la pressione perpendicolare, che soffre nt pel medesimo verso da C in c è $= p(z + dz) + dM \cos \varphi$. Avvertasi ora, che la stessa nt soffre, come si è detto, un' altra pressione contraria dall' acqua, che le sta innanzi $nPFt$; e riguardandosi l' elemento $NntT$ come una massa solida immersa nell' acqua, la sua superficie inferiore nt vien premuta perpendicolarmente da c in C con una forza $= pz + d.pz$, avvegnacchè se la superficie superiore NT è premuta da una forza $= pz$, l' inferiore infinitamente prossima nt dee soggiacere ad una pressione $= pz + d.pz = pz + pdz + zdp$ diretta da c verso C. Di quì apparisce, che nt si trova fra due pressioni opposte, una $= pz + pdz + dM . \cos. \varphi$, e tendente da C in c, l'altra $= pz + pdz + zdp$ e diretta da c verso C; onde sottratta questa da quella resta $dM . \cos. \varphi - zdp$ per la pressione della superficie nt esercitata in direzione di Cc. Laonde tutte le forze motrici, che agiscono sull' elemento $NntT$ si riducono alla pressione $dM. \cos. \varphi - zpd$, che si concepisce come applicata al suo centro di gravità, e spinge l' elemento da C in c facendogli descrivere nell' istante dt lo spazietto

Cc

$Cc = ds$. Quindi nominando v la velocità di ciascuna particella di quell'elemento, dal principio delle forze acceleratrici si ha $\frac{dM \cos.\varphi - zdp}{dM} = \frac{vdv}{ds}$. Il che era ec.

SCOLIO.

80. Nella soluzione di questo Problema abbiamo supposto, che crescendo s di ds cresca p di dp. Che se in alcun luogo della linea centrale divenisse dp negativo, e però crescendo la s decrescesse all' opposto la p, allora la forza acceleratrice dell' elemento sarebbe $\frac{dM \cos.\varphi + zdp}{dM}$, perchè il differenziale $d.pz$ diventa in tal caso $pdz - zdp$. Si può anche in questo caso concepir la cosa così: Dalla pressione $(z + dz)(p - dp)$ contro nt tendente da c in C risulta nella stessa direzione contro NT una pressione $= \frac{z}{z + dz}(z + dz) \times (p - dp) = z(p - dp)$, la quale sottratta dalla pressione opposta zp, che soffre la stessa NT da C verso c, resta la pressione zdp, da cui l' elemento viene spinto nella direzione del moto attuale dell' acqua: il perchè aggiuntavi la pressione del peso dell' elemento in quella direzione, risulta tutta la forza motrice dell' elemento $= dM \cos.\varphi + zdp$, e l' acceleratrice $= \frac{dM \cos.\varphi + zdp}{dM}$.

81.

81. Prima di passare all' applicazione di questa formola ai più belli ed interessanti Problemi intorno al moto dell' acqua ne' vasi, e canali, è necessario osservare, che chiamata v la velocità dell' acqua nell' orifizio del tubo, f l' area dell' orifizio, h la sezione infima del tubo contigua al detto orifizio, e supposto $h>f$, la velocità in quella sezione sarebbe $\frac{fv}{h}$, cioè minore che nell' orifizio nel rapporto di $f:h$ (74). Come passa dunque in un solo istante la velocità $\frac{fv}{h}$ alla velocità v? La nota *legge della continuità* nol consente, ed a questa legge altronde sembrano appoggiate le formole fondamentali del moto nella Meccanica. Giovanni Bernoulli nella sua *Idraulica* spiega la cosa così: In vicinanza del lume BE (*Fig.* 27, 28.) incomincia l' acqua a formare un canale infundiboliforme, ovvero a foggia d' imbuto per modo che l' acqua, che trovasi negli angoli CMB, DNE, rimane in quiete, mentre l' altra vi passa fra mezzo, e con velocità *continuamente* crescente si affaccia all' apertura, e ne sorte. Siffatto canale ed imbuto piacque a Bernoulli denominarlo colla parola di *gurgite*. Ma con qual legge si cangino le aree, e le velocità delle sezioni d' acqua, ond' esso è formato, non può dirsi che gratuitamente. Sebbene non è punto necessario di conoscere una tal legge;

Fig. 27. 28.

P im-

imperciocchè la velocità dell' acqua, che sbocca dal foro, non dipende punto dalla forma del gurgite, la di cui altezza sarà altronde picciolissima.

82. Un' altra considerazione da non ommettersi riguarda la situazione del foro, da cui l' acqua ha l' uscita. Quand' anche questo non si trovasse appunto nel mezzo del fondo *MN*, le cose finora dette, e da dirsi in appresso non patirebbero alcuna eccezione. In fatti la così detta linea centrale non è propriamente altro che la *linea di direzione del moto di tutti gli elementi dell' acqua*; e la condizione dell' esser ella eziandio la linea dei centri di gravità non influisce punto ne' precedenti e seguenti ragionamenti. Del vaso *FMNG* si consideri la sola porzione *FMQR* da se; e nel fondo *MQ* siavi il foro *BQ*, ma da una parte lungi dal mezzo; ed *RQ* sia una linea perpendicolare a tutte le sezioni orizzontali del vaso. Se ora tutte le particelle d' acqua di ciascuna sezione orizzontale *PA* discendono verticalmente colla stessa velocità, può concepirsi la massa intera dell' elemento *PpaA* concentrata e raccolta nel punto *A*. Il peso di quest' elemento non meno che la pressione da esso sostenuta per l' azione mutua delle particelle è proporzionale alla superficie *PA*; e tutte le molecole dell' elemento soffrono la medesima accelerazione come se tutta la massa fosse ridotta nel punto *A*, e tutte

le

le forze acceleratrici fossero applicate in A.

Che se l' orifizio in vece di essere aperto nel fondo, troverassi nei lati, come si vede nel vaso $ACDB$ (*Fig.* 30), dove il foro DF è situato fuor della base, e l' acqua è costretta ad uscire in una direzione OE orizzontale, o comunque inclinata all' orizzonte, anche in questo caso, che suol essere frequentissimo, tornerà in acconcio l' immaginare una specie di *gurgite Bernoulliano*, sicchè una porzione d'acqua rimanga immobile nello spazio GQC; onde le sezioni NM non solo vadano impicciolendosi secondo la legge di continuità, ma secondo questa legge si vadano eziandio disponendo nella situazione verticale, se la luce DF sarà verticale. Fig. 30.

Per l' altezza dell' acqua sopra l' orifizio prendesi in questo caso l' altezza sopra il punto di mezzo del medesimo, e però sopra il suo centro quando è circolare. Lo stesso dee dirsi allorchè all' orifizio DF si applica una doccia, o canella orizzontale, o inclinata comunque.

PROBLEMA II.

83. *Data un' equazione per la linea centrale* ICE (Fig. 29) *fra le coordinate ortogonali* $IL = x$, $LC = y$, *e date tutte le dimensioni del canale, e riguardando le pressione contro qualunque sezione* NT *come una funzione di* s, *ovvero* IC; *cercasi un' espressione generale per l' accelerazione di ciascun elemento* NntT. Fig. 29.

SOLUZIONE.

Si scorge tantosto, essere $dM = z ds$, (posta cioè $= 1$ la forza acceleratrice della gravità terrestre), cos. $\varphi = \frac{dx}{ds}$, $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Chepperò sostituendo questi valori nell'espressione generale della forza acceleratrice (79), questa si cambia in $\frac{dx - dp}{ds} = \frac{vdv}{ds}$. Il che era ec.

PROBLEMA III.

84. *Nel canale* APFB *mantenuto costantemente pieno fino in* AB = a *sorte l'acqua dall'apertura* PF = f *con uniforme celerità* = c; *cercasi la mutua pressione delle particelle d'acqua per una qualunque sezione* NT = z.

SOLUZIONE.

Poichè l'acqua sbocca da *PF* colla velocità c, passerà per *NT* colla velocità $= \frac{fc}{z}$: perciò nella formola precedente $dx - dp = vdv$ surrogando per v il suo valore $\frac{fc}{z}$, e $-\frac{fcdz}{z^2}$ per dv si ottiene $dp = dx + \frac{f^2c^2dz}{z^3}$, che integrata dà $p = x - \frac{f^2c^2}{2z^2} +$ Cost. Per determinare la costante, si osservi che la sezione suprema $AB = a$ soffre la pressione dell'atmosfera, cioè il peso d'una colonna

na d'acqua, che ha circa 32 piedi parigini d'altezza, e AB per base; perlocchè nominata h una tal altezza, diventerà $p = h$, quando è $z = a$, $x = 0$: laonde si avrà Cost. $= h + \frac{f^2 c^2}{2a^2}$; e conseguentemente $p = h + \frac{f^2 c^2}{2a^2} + x - \frac{f^2 c^2}{2z^2}$. Il che era ec.

PROBLEMA IV.

85. *Determinare la velocità* c *dell' acqua, che si scarica per l' apertura* PF.

SOLUZIONE.

Dicasi b l' ascissa IG, che rappresenta l'altezza verticale del centro di gravità della sezione suprema AB sopra quello della sezione infima, ovvero dell' apertura PF; e siccome PF è premuta dall' atmosfera con più forza che non è AB, chiamisi H l' altezza della colonna d'acqua, il di cui peso esprime una tal pressione. Pertanto p si muterà in H quando diventerà $x = b$, $z = f$; il che somministra l'equazione $H = h + \frac{f^2 c^2}{2a^2} + b - \frac{1}{2}c^2$, e da questa si trae il valore di $c = \sqrt{\frac{2a^2(b - H + h)}{a^2 - f^2}}$. Il che era ec.

Se AB è solo di alcuni piedi più alto di PF, si può senza alcun error sensibile assume-

re $H = h$, e di qui ricavare $c = \sqrt{\frac{2a^2b}{a^2-f^2}}$. Perciò chiamata A l'altezza dovuta alla velocità c, nell'ipotesi della gravità acceleratrice $= 1$, si ha $A = \frac{1}{2}c^2 = \frac{a^2b}{a^2-f^2}$, vale a dire il seguente.

TEOREMA V.

86. *L'altezza dovuta alla velocità, con cui l'acqua si scaglia dall'apertura d'un tubo nelle predette ipotesi, è quarta proporzionale alla differenza de' quadrati delle due sezioni suprema ed infima, al quadrato della sezione suprema, e all'altezza di questa sopra l'infima, cioè dell'acqua sopra l'apertura.*

Se si vuole, che la sezione suprema sia dieci volte più grande dell'infima, ovvero $a = 10f$, nasce $\frac{1}{2}c^2 = \frac{100}{99}b$. Quindi apparisce, che l'altezza dovuta alla velocità, con cui l'acqua si slancia dalle luci dei vasi, è sempre maggiore dell'altezza dell'acqua sopra la luce; ma che queste due altezze vanno sempre più accostandosi all'ugualianza quanto più s'impicciolisce la luce in confronto della larghezza del tubo o piuttosto della sua sezione suprema. Ma qui ci si presenta un nodo improvviso, e un paradosso de' più singolari: Egli è certo ed evidente, che in un vaso verticale-

ticale prismatico senza fondo la velocità dell' acqua, che dentro vi scorre e ne sorte, è quella ſteſſa d'un grave cadente, cioè sempre dovuta all'altezza da cui attualmente discende. Ma se nella noſtra formola $\frac{1}{2}c^2 = \frac{a^2 b}{a^2 - f^2}$ ponghiamo $a = f$, nasce $\frac{1}{2}c^2 = \infty$ e conseguentemente infinita la velocità, con cui l'acqua esce dal vaso. Queſto nodo ſi scioglie con far la dovuta attenzione al vero ſignificato di tale *velocità infinita*: ora queſta non altro ſignifica se non se che la velocità non può divenire coſtante, quale ſi è da noi suppoſta nel precedente Problema, prima di divenire infinita; e perchè non può farſi infinita che dopo un tempo infinito, vale a dire non mai; perciò neppur coſtante potrà diventare giammai, ma andrà sempre via via crescendo oltre ogni aumento aſſegnabile. In fatti la noſtra ipoteſi, che il vaso ſia mantenuto coſtantemente pieno, eſige neceſſariamente, che l'acqua, che entra superiormente nel prisma a riparar quella, che sorte, vi entri con quella velocità, con cui l'altra discende, e perchè queſta sempre discende più velocemente secondo la legge de' corpi gravi cadenti, entra quella sempre più rapidamente ed ancor eſſa sempre più prontamente discende; e per tal modo entrando l'una per di sopra, uscendo l'altra per di sotto con velocità sempre crescente, può una tale velocità giugnere

ad oltrepaſſare ogni grandezza aſſegnabile, cioè diventare infinita. Di qui ſi comprende, come dovendo il calcolo eſprimere la velocità nell' ipoteſi, che ella ſia coſtante anche quando il vaſo priſmatico è privo di fondo, non può che rappreſentarla infinita, giacchè non può in tal caſo farſi coſtante prima di diventare infinita, che è quanto dire non può eſſerlo mai, ſiccome è altronde chiaro dalla natura ſteſſa della quiſtione. Ma qui ci ſi offre naturalmente il problema, *quanto tempo* cioè *ſi richiegga nelle altre proporzioni del foro all' ampiezza del vaſo, perchè la velocità dell' acqua diventi uniforme*. Ciò verrà eſaminato nella Sez. III.

Preſo il foro f molto picciolo in confronto della sezione ſuprema a, ſiccome abbiamo ſuppoſto (68), trovaſi a un dipreſſo $A = \frac{a^2 b}{a^2} = b$, e quindi ſi ſtabiliſce il

TEOREMA VI.

87. *L' altezza dovuta alla velocità dell' acqua uſcente da una aſſai anguſta apertura d' un tubo o vaſo, è a un dipreſſo l' altezza ſteſſa dell' acqua ſopra il dato orifizio*.

Se-

SEZIONE II.

De' Vasi e Tubi, che vanno successivamente vuotandosi.

PROBLEMA V.

88. *Nello stesso tubo* ANPFB (Fig. 29) *giunge l'acqua da principio fino in* AB, *ed egli va continuamente vuotandosi per l'efflusso dell'acqua dal foro* PF: *cercasi la velocità dell'acqua dopo che se ne sarà smaltita tanta, quanta riempiva lo spazio* AKVB, *anche nel supposto che una data forza, come sarebbe l'azione d'uno stantuffo, premesse sopra la superficie suprema* KV *dell'acqua, che va abbassandosi.* Fig. 29.

SOLUZIONE.

Ritenute le precedenti denominazioni, prendasi una sezione nota $QB = n$, e la velocità dell'acqua, che passa per essa, facciasi $= u$; onde la velocità di quella, che passa per la sezione indeterminata NT, sarà $= \frac{nu}{z}$ che abbiamo posto $= v$. Ma si è trovato (83.) $dx - dp = vdv$; dunque poichè nell'ipotesi presente varia, come è chiaro, la u non meno della

la z, preso il valore di $vdv = \frac{n^2udu}{z^2} - \frac{n^2u^2dz}{z^3}$, si otterrà $dx - dp = \frac{n^2udu}{z^2} - \frac{n^2u^2dz}{z^3}$. Osservisi ora, che nell' istante dt, mentre la sezione NT progredisce in nt, la sezione KV si avanza in kv, e l' elemento $NntT$ resta $= KkvV$, cioè chiamata r la porzione Ii della linea centrale, e q la sezione KV, nasce $qdr = zds$; essendo $IC = s$; cioè $z = \frac{qdr}{ds}$, e però $\frac{n^2udu}{z^2} = \frac{n^2udu}{qdr} \cdot \frac{ds}{z}$. Laonde si avrà $dx - dp = \frac{n^2udu}{qdr} \cdot \frac{ds}{z} - \frac{n^2u^2dz}{z^3}$, ovvero $dp = dx - \frac{n^2udu}{qdr} \cdot \frac{ds}{z} + \frac{n^2u^2dz}{z^3}$. Passando ad integrare quest' equazione deesi aver riguardo, che, siccome si cerca il valore di p per un dato istante, convien considerare come date in quell' istante le quantità u, du, q, dr, e soltanto come variabili quelle, che dipendono dal luogo N del tubo cioè z, s, p. Perciò si ottiene $p = x - \frac{n^2udu}{qdr} \cdot \int \frac{ds}{z} - \frac{n^2u^2}{2z^2} +$ Cost. Posta tutta la linea centrale $ICE = \Delta$, si determina il valore della Cost., se si fa $x = IG = b$, $z = PF = f$, $s = ICE = \Delta$, prendendo l' integrale $\int \frac{ds}{z}$ in modo, che

che si annulli allorchè diviene $s = \Delta$: in tal caso l' orifizio PF soffre la pressione dell' atmosfera, cioè il peso d' una colonna d' acqua di altezza A. Quindi l' equazione diventa $A = b - \frac{n^2u^2}{2f^2} + \text{Cost.}$, cioè Cost. $= A - b + \frac{n^2u^2}{2f^2}$; e conseguentemente $p = A - b + \frac{n^2u^2}{2f^2} + x - \frac{n^2u^2}{2z^2} - \frac{n^2\ddot{u}du}{qdr} \cdot \int \frac{ds}{z}$, prendendo talmente l'integrale $\int \frac{ds}{z}$, che svanisca al diventare $s = \Delta$. Dicasi ora P la forza premente sulla superiore superficie KV; e sarà $p = P$ allorchè diverrà $x = I\gamma = \omega$, $s = r$, $z = q$; donde nasce $P = A - b + \frac{n^2u^2}{2f^2} - \frac{n^2u^2}{2q^2} + \omega - \frac{n^2udu}{qdr} \cdot \int \frac{ds}{z}$. Ma poichè nota esser dee non meno la figura del tubo, che la natura della linea centrale, saranno espresse con funzioni di r tanto l' ascissa $\omega = I\gamma$, quanto la sezione $KV = q$, ed essendo inoltre P o costante, o una funzione ancor essa di r, oppure di u, ne risulterà un' equazione differenziale fra r, ed u, dalla quale mercè l' integrazione si troverà u dato per r. Il che era ec.

Notisi qui, che P dee rappresentare l' altezza della colonna d' acqua, il di cui peso uguaglia non solo la pressione d' uno stantuffo ap-

applicato alla superior superficie KV, ma anco la pressione dell' atmosfera, per modo che nel supposto che KV sia di pochi piedi più alta dell' apertura PF, e che non siavi altra forza premente in KV fuori di quella dell' atmosfera, fatto $\int \frac{ds}{z} = M$, si ha $M\dot{u}du + \frac{(b-\omega)\,qdr}{n^2} + \left(\frac{u^2}{2q^2} - \frac{u^2}{2f^2}\right)qdr = 0$.

89. Fino ad ora si è sempre supposto la linea centrale $ICDE$ come situata nello stesso piano verticale IGE, cioè come una linea a *semplice curvatura*: ma con tutto questo le precedenti proposizioni non sono punto limitate a questa condizione. Quand' anche la linea centrale non giacesse in un medesimo piano, ma in qualsivoglia modo si piegasse, vale a dire quand' anche ella fosse una linea a *doppia curvatura*, tutto sussisterebbe come prima, riducendosi ogni divario alla posizione rispettiva delle tangenti CH e delle verticali CO, le quali per ogni punto C diverso starebbero in un piano diverso: ma la diversità di tali piani non fa punto variare le nostre dimostrazioni; imperciocchè si potrà sempre in ciascun piano OCH risolvere la forza di gravità dell' elemento Nt in due altre una parallela alla sezione NT, l'altra normale alla medesima; il che condurrà all' equazione differenziale ritrovata al §. 79. La sublime Geometria insegna il modo di espri-

me-

mere con un' equazione la natura della linea centrale a doppia curvatura, e di ritrovare per ogni punto C non solo l' angolo corrispondente OCH, ma ancora la posizione di quest' angolo.

90. Se dicesi v la celerità dell' uscita dal lume PF, si ha pel §. 72. $u = \frac{fv}{n}$, $du = \frac{fdv}{n}$; e però fatte queste sostituzioni nella precedente equazione nasce $\frac{Mf^2vdv}{n^2} + \frac{(b-\omega)qdr}{n^2} + \frac{f^2v^2dr}{2qn^2} - \frac{v^2qdr}{2n^2} = 0$. Posto pertanto l' orifizio f picciolissimo in paragone delle sezioni q, n, si possono disprezzare il primo e terzo termine di quest' equazione, la quale si trasforma in $v^2 = 2(b-\omega)$, cioè $v = \sqrt{2(b-\omega)}$. Di qui il seguente.

TEOREMA VII.

In un vaso, o tubo, che si va vuotando per un picciolissimo foro, la velocità dell' acqua, che sorte per quello, è dovuta all' altezza dell' acqua, che rimane sopra il foro.

91. La precedente formola differenziale somministra eziandio la soluzione del seguente

PROBLEMA VI.

In un vaso cilindrico, o prismatico retto e ver-

verticale, in cui l' altezza dell' acqua sopra il fondo nel principio del moto sia $=$ b, *cercasi la velocità di quella, che esce dal lume aperto nel fondo.*

SOLUZIONE.

In quest' ipotesi è manifesto, che nella predetta formola diventa $\omega = r = s$, $z = q = n$, $\Delta = b$; e dovendo annullarsi M allorchè diviene $s = \Delta = b$, trovasi perciò $M = \frac{s}{n} - \frac{b}{n} = \frac{\omega - b}{n}$. Quindi la formola si cangia in $\frac{f^2(\omega - b)vdv}{n^3} + \frac{(b-\omega)d\omega}{n} + \frac{f^2v^2d\omega}{2n^3} - \frac{v^2 d\omega}{2n} = o$. Pongasi $b - \omega = \lambda$, $d\lambda = -d\omega$, sicchè abbiasi $-\frac{f^2\lambda vdv}{n^3} - \frac{\lambda d\lambda}{n} - \frac{f^2v^2d\lambda}{2n^3} + \frac{v^2d\lambda}{2n} = o$, cioè $2\lambda vdv + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right)v^2d\lambda = -\frac{2n^2\lambda d\lambda}{f^2}$. Ora per integrare quest' equazione si moltiplichi per $\lambda^{-\frac{n^2}{f^2}}$, e nascerà $2\lambda^{-\frac{n^2}{f^2}+1}vdv + \left(1-\frac{n^2}{f^2}\right)\times v^2\lambda^{-\frac{n^2}{f^2}}d\lambda = -\frac{2n^2\lambda^{-\frac{n^2}{f^2}+1}d\lambda}{f^2}$, il di

cui

cui integrale è $\lambda^{1-\frac{n^2}{f^2}} v^2 = \frac{2n^2\lambda^{2-\frac{n^2}{f^2}}}{n^2-2f^2}$ + Cost. La Cost. si determina osservando, che nel principio del moto quando l'ascissa $I\gamma$, ovvero ω è $= o$, vale a dire $\lambda = b$, la velocità v dell' efflusso è $= o$; onde si ha Cost.

$$= -\frac{2n^2 b^{2-\frac{n^2}{f^2}}}{n^2-2f^2}.$$ Perlocchè ritrovasi

$$\lambda^{1-\frac{n^2}{f^2}} v^2 = \frac{2n^2}{n^2-2f^2}\left(\lambda^{2-\frac{n^2}{f^2}} - b^{2-\frac{n^2}{f^2}}\right),$$

e quindi $v^2 = \frac{2n^2 b}{n^2-2f^2}\left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}}\right)$;
e quindi l' altezza dovuta a questa velocità, cioè

a dire $\frac{1}{2}v^2 = \frac{n^2 b}{n^2-2f^2}\left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}}\right)$.
Il che era ec.

COROLLARIO I.

92. La velocità u dell' acqua nel vaso è $= \frac{fv}{n}$, il che dà $v^2 = \frac{n^2u^2}{f^2} = \frac{2n^2b}{n^2-2f^2} \times \left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}}\right)$, onde $\frac{1}{2}u^2 = \frac{f^2 b}{n^2-2f^2}$

$\times\left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}}\right)$, che esprime l' altezza dovuta alla velocità dell'acqua dentro il vaso.

COROLLARIO II.

93. Supposto f piccioliſſimo in confronto di n, cioè il lume piccioliſſimo in paragone della larghezza del vaso, ſi vede chiaro, che il termine $\left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}}$ diviene sprezzabile, e l' espreſſione dell' altezza dovuta alla velocità dell' uſcita ſi converte in $\frac{1}{2}v^2 = \frac{n^2\lambda}{n^2 - 2f^2}$ $= \lambda$, che è appunto ciò che ſi è dimoſtrato nel Teorema VII.

COROLLARIO III.

94. Se il vaso è ſenza fondo, che vuol dire $f = n$, allora risulta $\frac{1}{2}v^2 = -b\left(\frac{\lambda}{b} - 1\right)$ $= b - \lambda = \omega$, cioè l' altezza dovuta alla velocità, con cui l' acqua sorte dal fondo, è l'altezza ſteſſa della sua caduta, ovvero dell'abbaſſamento della sua superficie, che è appunto la legge della caduta de' gravi.

COROLLARIO IV.

95. Se $n = f\sqrt{2}$, ſi deduce $\frac{1}{2}v^2 =$ $\frac{n^2 b}{o}\left(\frac{\lambda}{b} - \frac{\lambda}{b}\right) = n^2\frac{o}{o}$, eſpreſſione vaga, che

che nulla significa. In questo caso è d'uopo integrare altrimenti l'equazione differenziale $2\lambda v dv + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) v^2 d\lambda = - \frac{2n^2 \lambda d\lambda}{f^2}$, la quale fatto $n^2 = 2f^2$ diventa $2\lambda v dv - v^2 d\lambda = - 4\lambda d\lambda$, e dividendo per λ^2, nasce $\frac{2\lambda v dv - v^2 d\lambda}{\lambda^2} = - \frac{4 d\lambda}{\lambda}$, il di cui integrale è $\frac{v^2}{\lambda} = - 4 \log. \lambda + \text{Cost.}$, e dovendo essere $v = 0$ quando $\lambda = b$, si avrà $v^2 = 4\lambda \log. \frac{b}{\lambda}$, e l'altezza dovuta alla velocità, cioè $\frac{1}{2}v^2 = 2\lambda \log. \frac{b}{\lambda}$.

COROLLARIO V.

96. In quest' ipotesi di $n = f\sqrt{2}$, la velocità dell'efflusso sta alla velocità dentro il vaso come $\sqrt{2} : 1$, e l'altezza dovuta a questa velocità è la metà della precedente, cioè $\lambda \log. \frac{b}{\lambda}$.

COROLLARIO VI.

97. Mutando l'espressione $v^2 = \frac{2n^2 b}{n^2 - 2f^2} \times \left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}}\right)$ in $\frac{2n^2 b}{n^2 - 2f^2}\left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{n^2}{f^2} - 1}\right)$ si scorge chiaramente, che per

ben due volte diventa $v = o$, l'una quando $\lambda = b$, l'altra quando $\lambda = o$. Havvi dunque un *massimo* di velocità, che convien determinare nel seguente

PROBLEMA VII.

98. *Determinare la massima velocità dell'acqua, che sgorga dal lume d'un vaso prismatico, o cilindrico retto.*

SOLUZIONE.

Nell' espressione $v^2 = \frac{2n^2b}{n^2-2f^2}\left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{n^2}{f^2}-1}\right)$ si faccia $\frac{2n2b}{n^2-2f^2} = c$, $\frac{\lambda}{b} = x$, $\frac{n^2}{f^2} - 1 = m$, e nascerà $v = c^{\frac{1}{2}}(x - x^m)^{\frac{1}{2}}$. Dunque $dv = \frac{\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}(dx - mx^{m-1}dx)}{\sqrt{(x - x^m)}} = o$; donde si raccoglie $x^{m-1} = \frac{1}{m}$, vale a dire $\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{n^2-2f^2}{f^2}}$ $= \frac{f^2}{n^2-f^2}$, e $\lambda = b\left(\frac{f^2}{n^2-f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}}$, che è l'altezza che debbe aver l'acqua sopra il lume per giugnere al punto della massima velocità dell'

dell' uscita. Surrogato ora questo valore di λ in quello di v^2 si ottiene $v^2 =$

$$\frac{2n^2b}{n^2-2f^2}\left(\left(\frac{f^2}{n^2-f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}}-\left(\frac{f^2}{n^2-f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}+1}\right)$$

$$=\frac{2n^2b}{n^2-2f^2}\left(\frac{f^2}{n^2-f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}}\left(1-\frac{f^2}{n^2-f^2}\right).$$

$$=\frac{2n^2b}{n^2-f^2}\left(\frac{f^2}{n^2-f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}}$$; e la radice di questa quantità dà la velocità massima ricercata, e la metà della stessa quantità esprime l'altezza dovuta alla detta celerità. Il che era ec.

99. Le precedenti formole trovano la loro applicazione anche quando l' acqua sbocca da un' apertura verticale in una direzione orizzontale, come si vede nella Fig. 30. Ma se dovesse procedersi con tutto il rigore, l' integrale $M = \int \frac{ds}{z}$ dovrebbe prendersi prima pel solo Gurgite, riguardandonsi le z, cioè *MN* come sezioni del Gurgite; poi dovrebbe prendersi per l' altra parte del vaso fino alla superficie suprema dell' acqua. Ma la forma del Gurgite è ignota, e però è forza il trascurare quella parte dell' integrale, che al Gurgite si riferisce, la quale per altro non può essere che molto picciola. Così tutto si riduce a semplici approssi-

Fig. 30.

mazioni, quando il ſommo rigore e la geometrica eſattezza non ponno aver luogo.

PROBLEMA VIII.

Fig. 29. 100. *Sia il tubo* ANPFB (*Fig.* 29.) *della ſteſſa larghezza circolare da per tutto, e comunque incurvato: cercaſi le velocità dell' acqua dopo che ne é ſortita quella porzione, che riempiva lo ſpazio* AKVB.

SOLUZIONE.

Preſa la ſolita formola generale $\frac{Mf^2 v\,dv}{n^2}$ $+\frac{(b-\omega)}{n^2}q\,dr+\frac{f^2v^2dr}{2qn^2}-\frac{v^2q\,dr}{2n^2}$ $=0$, e fatto in queſt' ipoteſi $z=q=n$, $M=\int\frac{ds}{z}=\frac{s-\Delta}{n}=\frac{r-\Delta}{n}$, la formola ſi muta in queſt' altra $\frac{2(r-\Delta)f^2 v\,dv}{n^2}+$ $\frac{f^2v^2dr}{n^2}-v^2dr+2(b-\omega)dr=0$, cioè $2(r-\Delta)f^2v\,dv+(f^2-n^2)v^2dr$ $+2n^2(b-\omega)dr=0$, e poſto $\Delta-r=\psi$, ſi ha di nuovo $2\psi v\,dv+$ $\left(1-\frac{n^2}{f^2}\right)v^2d\psi+\frac{2n^2}{f^2}(b-\omega)d\psi$ $=0$, e queſta moltiplicata per $\psi^{-\frac{n^2}{f^2}}$ diventa

ta $2\psi^{1-\frac{n^2}{f^2}} v dv + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) v^2 \psi^{-\frac{n^2}{f^2}} d\psi$

$+ \frac{2n^2}{f^2}(b - \omega)\psi^{-\frac{n^2}{f^2}} d\psi = 0$, la quale integrata si riduce in $v^2 \psi^{-\frac{n^2}{f^2}+1}$

$= -\frac{2n^2}{f^2} \int (b-\omega)\psi^{-\frac{n^2}{f^2}} d\psi +$ Cost.

Laonde si ritrova $v^2 = \psi^{\frac{n^2}{f^2}-1} \Big($ Cost. $-$

$\frac{2n^2}{f^2} \int (b-\omega)\psi^{-\frac{n^2}{f^2}} d\psi \Big)$. Quindi essendo per la velocità dentro il vaso $u^2 =$

$\frac{f^2 v^2}{n^2}$, si ricava $u^2 \psi^{-\frac{n^2}{f^2}+1} = -$

$2\int (b - \omega)\psi^{-\frac{n^2}{f^2}} d\psi +$ Cost. Il che era ec.

ESEMPIO.

101. Se il tubo $ADSB$ (Fig. 31) è retto, e inclinato all' orizzonte sotto l' angolo IEG $= \varphi$, essendo $Ii = r$, $IE = \Delta$, $I\gamma = \omega$, $IG = b$, $iE = \Delta - r = \psi$, $\gamma G = iQ =$ $b - \omega$, sarà $b - \omega = \psi$ sen. φ; e quindi nasce

Fig. 31.

 v^2

$$v^2\psi^{-\frac{n^2}{f^2}+1} = -\frac{2n^2}{f^2}\text{sen.}\,\varphi\int\psi^{1-\frac{n^2}{f^2}}d\psi$$

$$+\ \text{Cost.} = \frac{2n^2}{n^2-2f^2}\psi^{2-\frac{n^2}{f^2}}\text{sen}\,\varphi + \text{Cost.}$$

Dovendo pertanto essere $v = o$ quando è $\psi = \Delta = \frac{b}{\text{sen.}\,\varphi}$, si ricava Cost. $= -\frac{2n^2}{n^2-2f^2}\times \Delta^{2-\frac{n^2}{f^2}}$ sen. φ; e però $v^2 = \frac{2n^2\Delta\,\text{sen.}\,\varphi}{n^2-2f^2}\times \left(\frac{\psi}{\Delta} - \left(\frac{\Delta}{\psi}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}}\right)$. Ma è Δ sen. $\varphi = b$, e $\frac{\Delta}{\psi} = \frac{b}{b-\omega} = \frac{b}{\lambda}$ (posto cioè $\lambda = b-\omega$). Dunque sarà $v^2 = \frac{2n^2b}{n^2-2f^2}\times \left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}}\right)$, espressione affatto simile alla ritrovata pe' vasi verticali (91.). Di qui si fa manifesto il seguente

TEOREMA VIII.

102 *Dati due vasi prismatici retti di uguali basi, e di luci parimente uguali, ma di altezze comunque diverse, uno verticale, l' altro comunque inclinato all' orizzonte, talmente però che la vertica-*

le

le IG *del vaso inclinato s' agguagli all' altezza dell' altro, l' acqua si scaglia dalle luci di entrambi colla medesima velocità quando è difusà verticalmente in ambedue ad eguali profondità.*

E' abbastanza chiaro, che l' equazione

$$v^2 = \frac{2n^2b}{n^2-2f^2}\left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}}\right)$$ essendo la stessa sì pe' vasi prismatici verticali, che per gl' inclinati, varranno anche per questi le conseguenze dedotte per quelli; cioè l' altezza dell' acqua sopra il lume, la quale corrisponde alla massima velocità dell' uscita, è =

$$b\left(\frac{f^2}{n^2-f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}}$$; e la velocità massima =

$$\sqrt{\left(\frac{2n^2b}{n^2-f^2}\left(\frac{f^2}{n^2-f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2-f^2}}\right)}$$

PROBLEMA IX.

103. *Ritrovare il tempo* t, *che mette l' acqua in un vaso cilindrico o prismatico retto, comunque inclinato all' orizzonte, a discendere verticalmente d' una data profondità.*

SOLUZIONE.

Chiamata, come dianzi, *u* la velocità dell'

dell' acqua dentro il vaso, si ha $u = \frac{fv}{n} =$
$\sqrt{\frac{2f^2 b}{n^2 - 2f^2}}\left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}}\right)$. Ma $dt =$
$- \frac{d\psi}{u} = - \frac{d\lambda}{u \text{ sen. } \varphi}$. Dunque $dt =$

$$- \frac{d\lambda}{\text{sen. } \varphi \sqrt{\frac{2f^2 b}{n^2 - 2f^2}}\left(\frac{\lambda}{d} - \left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}}\right)}$$

. Per integrare quest'equazione, mettasi sotto la forma

$$- \frac{d\lambda}{\text{sen. } \varphi}\left(\frac{2f^2 \lambda}{n^2 - 2f^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \left(\frac{\lambda}{b}\right)^{-2 + \frac{n^2}{f^2}}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

e convertito in serie il secondo fattore trovasi

$$\left(1 - \left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{n^2}{f^2} - 2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{n^2}{f^2} - 2}$$
$$+ \frac{1.3}{1.2.4}\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{2n^2}{f^2} - 4} + \frac{1.3.5}{1.2.3.8}\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{3n^2}{f^2} - 6}$$

+ ec. Dunque $dt = - \frac{d\lambda}{\text{sen. } \varphi}\sqrt{\left(\frac{n^2 - 2f^2}{2f^2 b}\right)} \times$

$$\left(\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{n^2}{f^2} - \frac{5}{2}} + \frac{1.3}{1.2.4}\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{2n^2}{f^2} - \frac{9}{2}}\right.$$
$$\left. + \frac{1.3.5}{1.2.3.8}\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{3n^2}{f^2} - \frac{13}{2}} + \text{ec.}\right)$$

. Conseguente-

temente si ottiene $t = -\frac{b^{\frac{1}{2}}}{\text{sen.}\,\varphi}\left(\frac{n^2-2f^2}{2f^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\times\left(2\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{f^2}{2n^2-3f^2}\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{n^2}{f^2}-\frac{3}{2}} + \right.$$

$$\frac{1.3.f^2}{1.4.(4n^2-7f^2)}\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{2n^2}{f^2}-\frac{7}{2}} + \frac{1.3.5.f^2}{1.3.8.(6n^2-11f^2)}$$

$\times\left.\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{3n^2}{f^2}-\frac{11}{2}} + \text{ec.}\right) + \text{Cost.}$ Ma è manifesto, che si fa $t = 0$ allorchè $\lambda = b$; sarà dunque

$$\text{Cost.} = \left(2 + \frac{f^2}{2n^2-3f^2} + \frac{1.3.f^2}{1.4.(4n^2-7f^2)} + \frac{1.3.5.f^2}{1.3.8(6n^2-11f^2)} + \text{ec.}\right) \times \frac{1}{\text{sen.}\,\varphi}\sqrt{\frac{n^2b-2f^2b}{2f^2}},$$ e

per ultimo $t = \left(2 + \frac{f^2}{2n-3f^2} + \frac{1.3.f^2}{1.4(4n^2-7f^2)}\right.$

$$\left. + \frac{1.3.5.f^2}{1.3.8.(6n^2-11f^2)} + \text{ec.}\right)\times\frac{1}{\text{sen.}\,\varphi}\sqrt{\frac{n^2b-2f^2b}{2f^2}}$$

$$-\left(2\left(\frac{\lambda}{6}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{f^2}{2n^2-3f^2}\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{n^2}{f^2}-\frac{3}{2}} + \right.$$

$$\frac{1.3.f^2}{1.4.(4n^2-7f^2)}\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{2n^2}{f^2}-\frac{7}{2}} + \frac{1.3.5.f^2}{1.3.8.(6n^2-11f^2)}$$

$$\times\left.\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{3n^2}{f^2}-\frac{11}{2}} + \text{ec.}\right)\times\frac{1}{\text{sen.}\,\varphi}\sqrt{\frac{n^2b-2f^2b}{2f^2}}.$$

Il che era ec.

CO-

COROLLARIO I.

104. Se in questa espressione del tempo si mette $\lambda = b\left(\frac{f^2}{n^2 - f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2 - 2f^2}}$, che è l'altezza dell'acqua quando la velocità dell'uscita è massima, si viene a conoscere il tempo che passa dal principio dell'efflusso fino al momento della massima velocità. Ché se ponsi $\lambda = 0$, si fa noto il tempo del total vuotamento del vaso.

COROLLARIO II.

105. Supposto picciolissimo il lume, cioè n grandissimo in confronto di f, allora diventa $n^2 - 2f^2 = n^2$, e $\left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} = 0$. Perciò $dt = \frac{-nd\lambda}{f\,\text{sen.}\,\varphi\sqrt{2\lambda}}$. Quindi integrando nasce $t = -\frac{2n}{f\,\text{sen.}\varphi}\sqrt{\tfrac{1}{2}\lambda} + \text{Cost.} = -\frac{n}{f\,\text{sen.}\,\varphi}\sqrt{2\lambda} + \text{Cost.} = \frac{n}{f\,\text{sen}\,\varphi}(\sqrt{2b} - \sqrt{2\lambda})$.

COROLLARIO III.

106. Dato un altro vaso verticale, dove sen. $\varphi = 1$, di ugual larghezza, e di lume uguale coll'inclinato, e di altezza uguale alla verticale IG del vaso inclinato, sta il tempo della

della discesa dell' acqua per una data altezza verticale nel vaso inclinato al tempo della discesa per la stessa altezza nel vaso verticale, come sta $1 : \text{sen. } \varphi$.

PROBLEMA X.

107. *Ritrovare il tempo, dentro il quale l'acqua, che sorte dal foro, acquista la massima velocità, come pure la quantità d' acqua uscita in tal tempo, supposto il vaso, come nel Problema precedente, e il foro picciolissimo in paragone della larghezza del vaso.*

SOLUZIONE.

La velocità si fa massima allorchè $\lambda = b\left(\frac{f^2}{n^2-f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}}$. Posto adunque questo valore nell' equazione $t = \frac{n}{f \text{ sen. } \varphi}(\sqrt{2b} - \sqrt{2\lambda})$, nasce il tempo ricercato $t = \frac{n\sqrt{2b}}{f \text{ sen. } \varphi} \times \left(1 - \sqrt{\left(\frac{f^2}{n^2-f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}}}\right)$: si osservi ora, che $\left(\frac{f^2}{n^2-f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}}$ è $= 1 : \left(\frac{n^2-f^2}{f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}}$ $= 1 : \left(\frac{n^2}{f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2}}$, trascurandosi f^2, e $2f^2$ in

con-

confronto di n^2. Inoltre $\left(\frac{n^2}{f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2}}$ debb' essere un poco maggiore di 1, e non uguale ad 1, altrimenti la quantità grandissima $\frac{n^2}{f^2}$ sarebbe $= 1^{\frac{n^2}{f^2}} = 1$. Sia per tanto $\left(\frac{n^2}{f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2}} = 1 + y$: non potrà y essere che una quantità picciolissima, altrimenti, avendosi $\frac{n^2}{f^2} = (1 + y)^{\frac{n}{f^2}}$, la potenza di questo binomio buttata in serie si troverebbe visibilmente maggiore di $\frac{n^2}{f^2}$. Si sa poi, che è log. $(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 -$ ec., e però essendo y picciolissima, log. $(1 + y) = y$ prossimamente. Quindi s'inferisce $\left(\frac{n^2}{f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2}} = 1 + \log.(1 + y) = 1 +$ log. $\left(\frac{n^2}{f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2}} = 1 + \frac{2f^2}{n^2} \log \frac{n}{f}$. Dunque

$$\left(\frac{f^2}{n^2 - f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2 - 2f^2}} = \frac{1}{1 + \frac{2f^2}{n^2} \log. \frac{n}{f}}$$

$=$

$= 1 - \frac{2f^2}{n^2} \log. \frac{n}{f}$ giacchè, gli altri termini, che dà la divisione possono disprezzarsi a motivo del valore picciolissimo di $y = \log. (1 + y)$

$= \log. \left(\frac{n^2}{f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2}} = \frac{2f^2}{n^2} \log. \frac{n}{f}$, di cui tutte le potenze dopo la prima possono negligersi al confronto di quella. Da ciò si raccoglie

$\sqrt{\left(\frac{f^2}{n^2 - f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2 - 2f^2}}} = \sqrt{\left(1 - \frac{2f^2}{n^2} \log. \frac{n}{f}\right)}$

$= 1 - \frac{f^2}{n^2} \log. \frac{n}{f}$, disprezzate le potestà superiori del termine logaritmico. Dunque finalmente si ritrova $t = \frac{f\sqrt{2b}}{n \text{ sen. } \varphi} \log. \frac{n}{f}$, che è il tempo ricercato.

Per trovare la quantità d'acqua, che in tal tempo si scarica, si ha $\lambda = b - \frac{2f^2b}{n^2} \log. \frac{n}{f}$; e perciò $b - \lambda = \frac{2f^2b}{n^2} \log. \frac{n}{f}$, che rappresenta la quantità dell' abbassamento verticale dell'acqua nel vaso nel tempo che passa sino al conseguimento della massima celerità. Dunque per ultimo $(b - \lambda) n = \frac{2f^2b}{n} \log. \frac{n}{f}$ sarà la quantità d' acqua uscita in quel tempo. Il che era ec.

Esem-

ESEMPIO.

108. Nell' esperimento del Sig. DAN. BERNOULLI, relativo a questo Problema, si prende $b = \frac{1}{2}$ pied., $n = 6,2$ poll. quad., $\frac{f}{n} = \frac{1}{100}$, ma per la contrazione della vena d'acqua, di cui parleremo in seguito, si fa $\frac{f}{\sqrt{2}}$ in vece di f; d'onde risulta $\frac{2f^2 b}{n^2} = \frac{1}{20000}$, che somministra $b - \lambda = \frac{1}{20000} \log. \frac{n}{f} = \frac{1}{20000} \log. 100\sqrt{2} = \frac{1}{20000} \times (\log. 100 + \frac{1}{2} \log. 2)$. Ora $\log. 100 = 2 \times 2,302585 = 4,60517$; e $\log. 2 = 0,3010300 \times 2,302585 = 0,693147$; $\frac{1}{2} \log. 2 = 0,346573$. Dunque $b - \lambda = \frac{1}{20000} \times 4,951743 = 0,0002475$ pied. Di qui si scorge che l' acqua per giugnere all' acquisto della massima celerità non si è abbassata neppure d' un trentesimo di linea.

La quantità d' acqua in questo esperimento si ha moltiplicando per n l' abbassamento ritrovato. Dunque essendo l' abbassamento $= 0,00297$ poll., $n = 6,2$ poll. quadr., risulta la quantità d' acqua $= 0,018414$ poll. cub. $= \frac{1}{54}$ poll. cub. $= 32$ lin. cub. L' acqua in questa esperienza sprizzava in direzione orizzontale, e l' ampiezza del getto

era

era di 33 linee, per modo che fra il principio e il fine di quest' ampiezza avrebbono dovuto cadere 32 linee cubiche d'acqua; e se una mediocre gocciola è di circa 6 linee cubiche, 5 in 6 gocciole si sarebbono dovute trovare fra i detti confini. Che se BERNOULLI non potè ritrovarne pur una, ciò dipende dall' urto rapidissimo delle gocciole immediatamente seguenti, che non lascian campo alle poche precedenti di cascar prima, e di formare la mentovata striscia fra i due estremi del getto.

Per definire poi il tempo $t = \frac{f\sqrt{2b}}{n\,\text{sen.}\varphi} \log. \frac{n}{f}$; è necessario ridurre all' unità di minuti secondi una siffatta espressione; e a tal effetto osservo, che chiamata p la gravità acceleratrice terrestre, s lo spazio, da cui cade dalla quiete un grave nel tempo θ, c la velocità acquistata per la caduta in quel tempo, si ha dalla Meccanica $p\theta = c = \frac{ds}{d\theta}$; onde $p\theta d\theta = ds$, ed integrando $\frac{1}{2}p\theta^2 = s$, ed in fine $\theta = \sqrt{\frac{2s}{p}}$, ovvero posto $p = 1$, come sopra, $\theta = \sqrt{2s}$. Siccome per tanto i due tempi t, θ vengono espressi dalle quantità omogenee $\frac{f\sqrt{2b}}{n\,\text{sen.}\varphi} \log. \frac{n}{f}$, e $\sqrt{2s}$, il numero de' secondi dell' uno e l' altro sarà proporzionale alle stesse quantità, cioè

sarà

sarà $\sqrt{2s} : \frac{f\sqrt{2b}}{n\,\text{sen.}\varphi} \log. \frac{n}{f} :: \theta : t$; e perchè $\theta = 1''$ allorche $s = 15{,}1$ pied. $= g$, si avrà $t = \frac{f\sqrt{\frac{b}{g}}}{n\,\text{sen.}\varphi} \log. \frac{n}{f}$ rappresentato in secondi. Quindi essendo $\frac{f}{n} = \frac{1}{100\sqrt{2}}$; $\sqrt{\frac{b}{g}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} = \frac{1}{\sqrt{30{,}2}}$; $\log. \frac{n}{f} = 4{,}951743$; sen. $\varphi = 1$ perchè il vaso era verticale, si ottiene $t = \frac{1}{100\sqrt{60{,}4}} \times 4{,}951743'' = \frac{1}{100 \times 7{,}772} \times 4{,}951743'' = \frac{1}{777{,}2} \times 4{,}951743'' = 0{,}00637''$, che è certamente un tempicciuolo estremamente picciolo.

PROBLEMA XI.

Fig. 32. 109. *Il tubo* APFB (Fig. 32) *è cilindrico, ed inferiormente comunque incurvato, talmente però, che se si guida pel centro* E *dell' orifizio il piano orizzontale* EG, *la parte superiore* NI *è diritta, ed inclinata all' orizzonte sotto l' angolo* φ: *cercosi la velocità dell' acqua dopo che ne sarà sortita una data quantità*.

SOLUZIONE.

Supponghasi l' acqua discesa fino a KV, essendo come prima $INE = \Delta$, $IG = b$,

iE

$iE = \psi$, $I\gamma = \omega$, $\gamma G = b - \omega = \lambda$, si faccia $EDN = \theta$; e però $iN = \psi - \theta$; e quindi $b - \omega = (\psi - \theta)$ sen. φ, il qual valore surrogato nell' equazione $u^2 \psi^{-\frac{n^2}{f^2}+1}$

$$= -2\int (b - \omega)\, \psi^{-\frac{n^2}{f^2}} d\psi + \text{Cost.}$$

la trasforma in

$$u^2 \psi^{-\frac{n^2}{f^2}+1} = -2 \text{ sen.}\varphi \int (\psi - \theta)\, \psi^{-\frac{n^2}{f^2}} d\psi +$$

$$\text{Cost.} = -2 \text{ sen.}\varphi \int \psi^{-\frac{n^2}{f^2}+1} d\psi$$

$$+ 2\theta \text{ sen.}\varphi \int \psi^{-\frac{n^2}{f^2}} d\psi + \text{Cost.} =$$

$$\frac{2f^2 \psi^{-\frac{n^2}{f^2}+2} \text{ sen.}\varphi}{n^2 - 2f^2} - \frac{2f^2 \theta \psi^{-\frac{n^2}{f^2}+1} \text{ sen.}\varphi}{n^2 - f^2}$$

+ Cost. Ma è $u = o$ quando $\psi = \Delta$; dunque Cost.

$$= \frac{2f^2 \theta \Delta^{-\frac{n^2}{f^2}+1} \text{ sen.}\varphi}{n^2 - f^2} - \frac{2f^2 \Delta^{-\frac{n^2}{f^2}+2} \text{ sen.}\varphi}{n^2 - 2f^2}.$$

Laonde $u^2 = \dfrac{2f^2 \psi \text{ sen.}\varphi}{n^2 - 2f^2} - \dfrac{2f^2 \theta \text{ sen.}\varphi}{n^2 - f^2}$

$$+ \frac{2 f^2 \theta \text{ sen. } \varphi}{n^2 - f^2} \left(\frac{\Delta}{\psi}\right)^{-\frac{n^2}{f^2}+1}$$

$$- \frac{2 f^2 \psi \text{ sen. } \varphi}{n^2 - 2 f^2} \left(\frac{\Delta}{\psi}\right)^{-\frac{n^2}{f^2}+2}$$

$$= \frac{2 f^2 \theta \text{ sen. } \varphi}{n^2 - f^2} \left(\left(\frac{\Delta}{\psi}\right)^{-\frac{n^2}{f^2}+1} - 1\right)$$

$$- \frac{2 f^2 \psi \text{ sen. } \varphi}{n^2 - 2 f^2} \left(\left(\frac{\Delta}{\psi}\right)^{-\frac{n^2}{f^2}+2} - 1\right).$$

Il che era ec.

COROLLARIO I.

110. Suppoſto $n = f$, la prima parte di queſt' integrale ſi cangia in $2 f^2 \theta$ sen. $\varphi \times \frac{0}{0}$, quantità indeterminata, la quale indica doverſi per queſto caſo prendere l' integrale in altro modo. Richiamata pertanto l' equazione differenziale $2 \psi v d v + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) v^2 d\psi + \frac{2 n^2}{f^2} (b - \omega)\, d\psi = o$, e ſoſtituito $\frac{n^2 u^2}{f^2}$ per v^2, $\frac{n^2 u d u}{f^2}$ per $v d v$, ſicchè naſca $\frac{2 n^2 \psi u d u}{f^2}$
$+ \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) \frac{n^2}{f^2} u^2 d\psi + \frac{2 n^2}{f^2} (b - \omega) d\psi$
$= 2 \psi u d u + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) u^2 d\psi + 2 (b - \omega) d\psi$
=

$= o$, in questa ipotesi di $n = f$, $b - \omega = (\psi - \theta)$ sen. φ si ottiene $2\psi u du + 2(\psi - \theta) d\psi$ sen. $\varphi = 0$; e quindi $2udu = \frac{2\theta d \psi \text{ sen.} \varphi}{\psi} - 2 d\psi \text{ sen.} \varphi$, ed integrando $u^2 = 2\theta$ sen. φ log. $\psi - 2\psi$ sen. $\varphi +$ Cost. $= 2$ sen. $\varphi \left(\Delta - \psi + \theta \log. \frac{\psi}{\Delta} \right)$.

COROLLARIO II.

111. Per avere la massima velocità in questo caso, si fa $du = o$ nell'equazione differenziale $2\psi udu + 2(\psi - \theta) d\psi \text{sen.} \varphi = 0$, e si deduce $\psi = \theta$, cioè la massima velocità allorchè l'acqua è discesa fino al piano orizzontale, che passa pel centro del lume.

COROLLARIO III.

112. Per ritrovare tutta l'acqua, che in questo caso può sortire dal vaso, facciasi $u^2 = o$, cioè $2 \text{ sen.} \varphi \left(\Delta - \psi + \theta \log. \frac{\psi}{\Delta} \right) = 0$; donde si ritrae tanto $\Delta = \psi$, che vale appunto nel principio del moto, quanto $\psi - \theta \log. \psi = \Delta - \theta \log. \Delta$, e la risoluzione di questa equazione trascendente farà conoscere la porzione Ei del tubo, la quale non si vuoterà d'acqua.

COROLLARIO IV.

113. Se $n = f\sqrt{2}$, diventa $n^2 - 2f^2 = o$,

 e

e nulla si può inferire dall' equazione di questo Problema. Convien dunque ricorrere all' equazione differenziale $2\psi u du + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) u^2 d\psi$ $+ 2(\psi - \theta) d\psi \,\text{sen.}\varphi = o$, dove sostituito 2 per $\frac{n^2}{f^2}$ si ha $2\psi u du - u^2 d\psi + 2(\psi - \theta) d\psi \,\text{sen.}\varphi = o$, e dividendo per ψ^2 nasce $\frac{2\psi u du - u^2 d\psi}{\psi^2} = \frac{2(\theta - \psi) d\psi \,\text{sen.}\varphi}{\psi^2}$, ed integrando $\frac{u^2}{\psi} = -$ $\frac{2\theta \,\text{sen.}\varphi}{\psi} - 2\,\text{sen.}\varphi \log.\psi + \text{Cost.} = 2\theta \,\text{sen.}\varphi \times$ $\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\psi}\right) + 2\,\text{sen.}\varphi \log.\frac{\Delta}{\psi}$; e perciò $u^2 =$ $2\theta \,\text{sen.}\varphi \left(\frac{\psi}{\Delta} - 1\right) + 2\psi \,\text{sen.}\varphi \log.\frac{\Delta}{\psi}$.

COROLLARIO V.

114. In questo stesso caso di $n^2 = 2f^2$ facendo $du = o$, l' equazione differenziale del Corollario precedente somministra $u^2 = 2(\psi - \theta)\,\text{sen.}\varphi$, il qual valore sostituito al dianzi ritrovato dà $2(\psi - \theta)\,\text{sen.}\varphi = 2\theta \,\text{sen.}\varphi \left(\frac{\psi}{\Delta} - 1\right)$ $+ 2\psi \,\text{sen.}\varphi \log.\frac{\Delta}{\psi}$, oppure $2\psi \,\text{sen.}\varphi =$ $\frac{2\theta\psi \,\text{sen.}\varphi}{\Delta} + 2\psi \,\text{sen.}\varphi \log.\frac{\Delta}{\psi}$, vale a dire

log.

$\log. \frac{\Delta}{\psi} = \frac{\Delta - \theta}{\Delta}$; e quindi, preso e pel numero, che ha per suo logaritmo iperbolico l' unità, nasce $\frac{\Delta}{\psi} = e^{\frac{\Delta - \theta}{\Delta}}$, cioè $\psi = \Delta e^{\frac{\theta - \Delta}{\Delta}}$, al qual valore corrisponde la massima celerità. Da ciò si inferisce, che l' acqua scorrerà dentro il tubo colla massima velocità quando sopra il piano orizzontale *GE* otterrà l' altezza $(\Delta e^{\frac{\theta - \Delta}{\Delta}} - \theta)$ sen. φ.

COROLLARIO VI.

115. Stando alla stessa ipotesi di $n^2 = 2f^2$, e nell' equazione $u^2 = 2\theta$ sen. $\varphi \left(\frac{\psi}{\Delta} - 1\right)$ $+ 2\psi$ sen. $\varphi \log. \frac{\Delta}{\psi}$ posto $u^2 = 0$, si ritrova tanto $\psi = \Delta$ pel principio del moto dell' acqua, quanto $\theta \left(\frac{\psi}{\Delta} - 1\right) + \psi \log. \frac{\Delta}{\psi} = 0$, la qual equazione risoluta farà conoscere il luogo fin dove l' acqua giugnerà nel tubo, non potendo tutta scaricarsi.

LEMMA.

116. *Nel cono retto troncato* HABI (Fig. 33), *le di cui basi* AB $=$ f, HI $=$ b, *e*

Fig. 33.

e l' altezza NF $= a$, *cercasi un' equazione fra una sezione qualunque* PR $= z$ *parallela alle basi, e l' altezza* OF $= x$.

SOLUZIONE.

Essendo *AMB* il cono intero, si ha $\sqrt{f} : \sqrt{h} :: FM : NM$; $\sqrt{z} : \sqrt{h} :: OM : NM$; e parimente $\sqrt{f} - \sqrt{h} : \sqrt{h} :: a : NM$; $\sqrt{z} - \sqrt{h} : \sqrt{h} :: a - x : NM$. Dunque $\sqrt{f} - \sqrt{h} : \sqrt{z} - \sqrt{h} :: a : a - x$; e perciò $(a - x) \times (\sqrt{f} - \sqrt{h}) = a(\sqrt{z} - \sqrt{h})$, cioè $z = \frac{[a\sqrt{f} - x(\sqrt{f} - \sqrt{h})]^2}{a^2}$. Il che era ec.

PROBLEMA XII.

117. *Il vaso prismatico o cilindrico retto* EDIQ (Fig. 34) *è unito al tubo conico* HIBA *applicato lateralmente al fondo del vaso, e scorrendo l'acqua per l'apertura* HI *del vaso sorte per l' apertura* AB *del tubo: si cerca la volocità dell' acqua, discesa che sarà nel vaso per una data altezza.*

Fig. 34.

SOLUZIONE.

Si richiami l' equazione differenziale $Mdu + \frac{(b-\omega)qdr}{n^2} + \left(\frac{u^2}{2q^2} - \frac{u^2}{2f^2}\right)qdr = 0$, e si cerchi prima l' integrale $M = \int \frac{ds}{z}$. Ora nel tubo conico *HIBA* ritenute le denominazioni del

del Lemma precedente, e fatto $MN = c$, $MNO = s = c + a - x$, nasce $\int \frac{ds}{z} = - \int \frac{a^2 dx}{[a\sqrt{f} - x(\sqrt{f} - \sqrt{h})]^2} = - \frac{a^2}{(\sqrt{f} - \sqrt{h})[a\sqrt{f} - (\sqrt{f} - \sqrt{h})x]} +$ Cost.; e perchè dee svanire M quando $s = c + a$, ovvero quando $x = 0$, si ha $M = \frac{a}{(\sqrt{f} - \sqrt{h})\sqrt{f}} - \frac{a^2}{(\sqrt{f} - \sqrt{h})[a\sqrt{f} - (\sqrt{f} - \sqrt{h})x]}$. Quindi dovendo prendersi quest' integrale per tutto il tubo da F fino ad N, si fa $x = a$, e si ottiene l' espressione $- \frac{a}{\sqrt{fh}}$. Definito così l' integrale M per tutto il tubo conico $BAHI$ si proceda a determinarlo pel vaso cilindrico $EDIQ$, dove tutte le sezioni essendo uguali si ha $z = q = n$; e perciò $\int \frac{ds}{z} = \int - \frac{dx}{n} = - \frac{x}{n} +$ Cost. Ma per $x = a$ si è ritrovato quest' integrale $= - \frac{a}{\sqrt{fh}}$; dunque Cost. $= - \frac{a}{\sqrt{fh}} + \frac{a}{n}$. Laonde $M = \int \frac{ds}{z} = \frac{a - x}{n} - \frac{a}{\sqrt{fh}} = \frac{s - c}{n} - \frac{a}{\sqrt{fh}}$. Sia l'angolo $QNF = \mu$, e si troverà $NG = a . \cos. \mu$, e quindi $b = QG = c - a \cos. \mu$. Sarà inoltre (Problema

blema V.) $s = r = \omega$; onde fatte le debite sostituzioni, l' equazione differenziale si cangia in $\left(\frac{r-c}{n} - \frac{a}{\sqrt{fh}}\right) udu + \frac{(c - a \cos. \mu - r) dr}{n}$ $+ \left(\frac{u^2}{2n^2} - \frac{u^2}{2f^2}\right) ndr = 0$, cioè $2\left(r - c - \frac{na}{\sqrt{fh}}\right) udu + 2(c - a \cos. \mu - r) dr + u^2 dr - \frac{n^2 u^2 dr}{f^2} = 0$. Pongasi ora $r - c - \frac{na}{\sqrt{fh}}$ $= y$; $r = y + c + \frac{na}{\sqrt{fh}}$; $dr = dy$, e l' equazione si trasforma in $2yudu + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) u^2 dy$ $= 2\left(\frac{na}{\sqrt{fh}} + a \cos. \mu + y\right) dy$, la quale moltiplicata per $y^{-\frac{n^2}{f^2}}$ diviene $2y^{1-\frac{n^2}{f^2}} udu +$ $\left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) u^2 y^{-\frac{n^2}{f^2}} dy = 2y^{1-\frac{n^2}{f^2}} dy +$ $2ay^{-\frac{n^2}{f^2}} dy \cos. \mu + \frac{2nay^{-\frac{n^2}{f^2}} dy}{\sqrt{fh}}$, ed integrata, dà $u^2 y^{1-\frac{n^2}{f^2}} = \frac{2f^2 y^{2-\frac{n^2}{f^2}}}{2f^2 - n^2} +$

2

$\frac{2f^2ay^{1-\frac{n^2}{f^2}}\cos.\mu}{f^2-n^2}+\frac{2f^2nay^{1-\frac{n^2}{f^2}}}{(f^2-n^2)\sqrt{fh}}+$ Coft. Si determina la Coft. offervando, che fi fa $u=0$, quando $r=0$, ovvero $y=-\frac{na}{\sqrt{fh}}-c=k$, pofto cioè $k=-c-\frac{na}{\sqrt{fh}}$. Dunque $u^2y^{1-\frac{n^2}{f^2}}$

$$=\frac{2f^2k^{2-\frac{n^2}{f^2}}}{n^2-2f^2}+\frac{2f^2ak^{1-\frac{n^2}{f^2}}\cos.\mu}{n^2-f^2}+$$

$$\frac{2f^2nak^{1-\frac{n^2}{f^2}}}{(n^2-f^2)\sqrt{fh}}-\frac{2f^2nay^{1-\frac{n^2}{f^2}}}{(n^2-f^2)\sqrt{fh}}-$$

$$\frac{2f^2ay^{1-\frac{n^2}{f^2}}\cos.\mu}{n^2-f^2}-\frac{2f^2y^{2-\frac{n^2}{f^2}}}{n^2-2f^2}$$; e finalmente

$$u^2=\frac{2f^2k}{n^2-2f^2}\left(\left(\frac{k}{y}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}}-\frac{y}{k}\right)+$$

$$\frac{2f^2a\cos.\mu\sqrt{fh}+2f^2na}{(n^2-f^2)\sqrt{fh}}\left(\left(\frac{k}{y}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}}-1\right).$$

Il che era ec.

CO-

COROLLARIO I.

118. Se il tubo è orizzontale; allora diventando $\cos.\mu = 0$, si ottiene $u^2 = \frac{2f^2k}{n^2 - 2f^2} \times$

$$\left(\left(\frac{k}{y}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} - \frac{y}{k}\right) + \frac{2f^2na}{(n^2 - f^2)\sqrt{fh}} \times \left(\left(\frac{k}{y}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} - 1\right).$$

COROLLARIO II.

119. Se il tubo è adattato verticalmente al fondo del vaso; allora $\cos.\ \mu = -1$, ed

$$u^2 = \frac{2f^2k}{n^2 - 2f^2}\left(\left(\frac{k}{y}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} - \frac{y}{k}\right) +$$

$$\frac{2f^2na - 2f^2a\sqrt{fh}}{(n^2 - 2f^2)\sqrt{fh}}\left(-1 + \left(\frac{k}{y}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}}\right).$$

PROBLEMA XIII.

120. *Supposto tutto come nel Problema precedente, ritrovare la velocità dell' acqua quando l' orifizio* BA = f *è picciolissimo in confronto della larghezza* EQ = n *del vaso.*

SOLUZIONE.

Essendo v la velocità dell' acqua nell' usci-

uscire dal lume BA, ed $u^2 = \frac{f^2 v^2}{n^2}$, sostituito questo valore nell' equazione differenziale $2\left(r - c - \frac{na}{\sqrt{fh}}\right) udu + 2\left(c - a\cos.\mu - r\right) dr + u^2 dr - \frac{n^2 u^2 dr}{f^2} = 0$, e disprezzati i termini moltiplicati per $\frac{f^2}{n^2}$, o anche per $\frac{f\sqrt{f}}{n}$, si ritrova $v^2 = 2\left(c - a\cos.\ \mu - r\right)$; e conseguentemente l' altezza dovuta alla velocità dell' uscita, cioè $\frac{1}{2}v^2 = c - a\cos.\ \mu - r = QG - QV = VG =$ all' altezza dell' acqua sopra l' orifizio del tubo.

Ma per definire con maggior rigore la velocità, che qui si cerca, nell' equazione differenziale, dopo aver sostituito $\frac{f^2 v^2}{n^2}$ per u^2, non dovranno ommettersi se non se que' termini, che si trovano moltiplicati per $\frac{f^2}{n^2}$; e pertanto si otterrà $-\frac{2af\sqrt{f}.\,vdv}{n\sqrt{h}} + 2\left(c - a\,\text{cos}.\,\mu - r\right) dr - v^2 dr = 0$. Per passare ora all' integrazione di questa equazione faccio $y = -v^2 - 2r$, e colle dovute sostituzioni ottengo $\frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} \times (dy + 2dr) + 2(c - a\,\text{cos}.\,\mu - r)\,dr + ydr$

+

$+ 2rdr = 0$, cioè $\left(2c - 2a \operatorname{cof.} \mu + \frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + y\right) dr$ $= - \frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} dy$, vale a dire $dr = -$

$$\frac{\frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} dy}{\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a \operatorname{cof.} \mu + y}$$, ed integrando $r =$

$- \frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} \log. \left(\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a \operatorname{cof.} \mu + y\right)$ $+ \text{Coft.} = - \frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} \log. \left(\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - \right.$ $\left. 2a \operatorname{cof.} \mu - 2r - y^2\right) + \text{Coft.}$ Ma $y^2 = 0$, quando $r = 0$; dunque Coft. $= \frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} \times$ $\log. \left(\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a \operatorname{cof.} \mu\right)$. Laonde $r =$

$$\frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} \log. \frac{\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a \operatorname{cof.} \mu}{\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a \operatorname{cof.} \mu - 2r - y^2};$$

e prefo e pel numero, che ha per fuo logarit-
mo

mo iperbolico l'unità, si trova $e^{\frac{rn\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}} = \dfrac{\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a\,\text{cos}.\,\mu}{\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a\,\text{cos}.\,\mu - 2r - v^2}$, ovvero

$$\left(\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a\,\text{cos}.\,\mu - 2r - v^2\right) e^{\frac{rn\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}}$$

$= \dfrac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a\,\text{cos}.\,\mu$. Dunque finalmente

$$v^2 = \left(\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a\,\text{cos}.\,\mu\right)\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{rn\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}}}\right)$$

$-2r$, ed $u^2 = \dfrac{f^2v^2}{n^2} = \dfrac{f^2}{n^2}\left(\dfrac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a\,\text{cos}.\,\mu\right)$

$\times\left(1 - e^{-\frac{rn\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}}\right) - \dfrac{2f^2r}{n^2}$. Il che era ec.

COROLLARIO I.

121. Quando $r = 0$, diventa v, ed $u = 0$, come esser dee; ma cresce rapidissimamente il valore di v, ed u fintantochè resta piccolissimo r, diventando allora $v^2 = \dfrac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a\,\text{cof}.\,\mu$, ed

ed $\mu^2 = \frac{f^2}{n^2}\left(\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a \operatorname{cof.}\mu\right)$ proſſimamente, cioè l'altezza dovuta alla velocità dell' uſcita dall' orifizio del tubo trovaſi a un dipreſſo uguale all' altezza della ſuprema ſezione del vaſo ſopra l' orifizio del tubo, giacchè può diſprezzarſi il termine $\frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}}$. Creſcendo poi r, ſcema il valore di v^2; ond' è, che per un determinato valore di r dee ritrovarſi maſſimo il valore di v.

COROLLARIO II.

122. Nell' equazione $v^2 = \left(\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a \operatorname{cof.}\mu\right)\left(1 - e^{-\frac{rn\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}}\right) - 2r$, fatto $v^2 = 0$, ſi ottiene egualmente $r = 0$ pel principio del moto, e $2r + e^{\frac{-rn\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}}\left(\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a \operatorname{cof.}\mu\right) = \frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a \operatorname{cof.}\mu$; e trovato da tal equazione il valore di r, ſi conoſcerà di quanto potrà l'acqua abbaſſarſi nel vaſo per continuare a ſcaricarſi per l' apertura del tubo.

PRO-

PROBLEMA XIV.

123. *Determinare nelle stesse ipotesi la massima velocità dell' acqua.*

SOLUZIONE I.

Nella predetta equazione fatto dv, ovvero $2vdv = 0$, si ritrova $- 2dr + \frac{n\sqrt{h}}{af\sqrt{f}} \times$

$$\left(\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a \operatorname{cos.} \mu\right) e^{\frac{-rn\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}} dr = 0,$$

cioè $e^{\frac{rn\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}} = \frac{n\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}\left(- a \operatorname{cos.} \mu + c\right) + 1.$

Laonde passando ai logaritmi si deduce $\frac{n\sqrt{h}}{af\sqrt{f}} \cdot r$

$$= \log. \frac{af\sqrt{f} + (c - a \operatorname{cos.} \mu)\, n\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}, \text{ ovvero}$$

$$r = \frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} \log. \frac{af\sqrt{f} + (c - a \operatorname{cos.} \mu)\, n\sqrt{h}}{af\sqrt{f}},$$

che esprimerà la discesa dell' acqua per giugnere alla massima velocità. Il che era ec.

COROLLARIO I.

124. E' facile accorgersi, che un tal valore di r non può essere che picciolissimo, perchè, seb-

ſebbene ſia grandiſſima la quantità sotto il segno logaritmico, il logaritmo però è ſempre molto picciolo in paragone di quella, ed eſſendo un tal logaritmo moltiplicato per la picciolissima quantità $\frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}}$ non può riſultarne che un prodotto aſſai picciolo; dal che ſi raccoglie, che l'acqua quaſi immantinente arriva a conſeguire la maſſima celerità.

COROLLARIO II.

125. Eſaminato il valore di $r = \frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} \log. \frac{af\sqrt{f} + (c - a \text{ coſ.} \mu) n\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}$, ſi ſcorge, che per eſſere aſſai picciolo il primo termine $af\sqrt{f}$ del numeratore ſotto il segno logaritmico in confronto dell'altro, può eſſo traſcurarſi, ed aſſumerſi $r = \frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} \log. \frac{(c - a \text{ coſ.} \mu) n\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}$.

Ora è abbaſtanza chiaro, che, a motivo di $\frac{n}{f}$ grandiſſimo, il log. $\frac{(c - a \text{ coſ.} \mu) n\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}$ non varia che aſſai poco, comunque variar poſſa, purchè non eſtremamente, il rotto $\sqrt{\frac{h}{f}}$. Perlocchè

chè può prenderſi $r = \frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} \log. \frac{(c - a\,\text{coſ.}\,\mu)n}{af}$.
Si conſiderino pertanto tre caſi 1.º $f > h$ pel tubo conico coll' apertura eſterna più larga. 2.º $f = h$ pel tubo cilindrico. 3.º $f < h$ pel tubo conico che ſi va reſtringendo al di fuori. Rimanendo le ſteſſe le altre quantità, riſulta r nel primo caſo maggiore che nel ſecondo, e nel ſecondo maggiore che nel terzo, cioè a dire l'acqua per arrivare alla maſſima celerità dee abbaſſarſi di più nel vaſo quando il tubo ad eſſo adattato è un cono troncato, eſternamente divergente, che quando è un cilindro: e più quando è un cilindro, che quando è un cono eſternamente convergente. Siccome poi è proſſimamente $v^2 = \frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a\,\text{coſ.}\,\mu$ $- 2r = 2c - 2a\,\text{coſ.}\,\mu - 2r$, ſi fa manifeſto, che l'acqua acquiſta nel primo caſo una velocità minore, che nel ſecondo; e nel ſecondo minore, che nel terzo.

COROLLARIO III.

126. Moltiplicandoſi per n il valore di r ſi trova $\frac{af\sqrt{f}}{\sqrt{h}} \log. \frac{af\sqrt{f} + (c - a\,\text{coſ.}\,\mu)n\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}$ per la quantità d' acqua, che ſi ſcarica in quel breviſſimo intervallo, finchè arriva alla maſſima celerità.

SOLUZIONE II.

127. Per definire con maggior accuratezza e rigore il valore di r corrispondente alla massima velocità che si cerca, ricorro alla generale equazione differenziale (117) $2yudu + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) u^2 dy = 2\left(\frac{na}{\sqrt{fh}} + a\cos.\mu + y\right) dy$, e posto $du = 0$, ottengo $u^2 = \left(\frac{2na}{\sqrt{fh}} + 2a\cos.\mu + 2y\right)\frac{f^2}{f^2 - n^2}$, che uguagliato all' altro valore di u^2 ivi ritrovato somministra $\frac{f^2}{f^2 - n^2}\left(\frac{2na}{\sqrt{fh}} + 2a\cos.\mu + 2y\right) = \frac{2f^2k}{n^2 - 2f^2} \times \left(\left(\frac{k}{y}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} - \frac{y}{k}\right) + \frac{2f^2 a\cos.\mu\sqrt{fh} + 2f^2 na}{(n^2 - f^2)\sqrt{fh}} \times \left(\left(\frac{k}{y}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} - 1\right)$; d' onde si trae $\frac{na}{\sqrt{fh}} + a\cos.\mu + y = \frac{n^2 - f^2}{n^2 - 2f^2} y - \frac{(n^2 - f^2)k}{n^2 - 2f^2} \times \left(\frac{k}{y}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} - \frac{(a\cos.\mu\sqrt{fh} + na)}{\sqrt{fh}}\left(\frac{k}{y}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} + \frac{a\cos.\mu\sqrt{fh} + na}{\sqrt{fh}}$, ovvero $\frac{f^2 y}{n^2 - 2f^2} =$ (k

$$\left(\frac{k(n^2-f^2)}{n^2-2f^2}+\frac{a\,\text{cos}.\,\mu\sqrt{fh}+na}{\sqrt{fh}}\right)\left(\frac{k}{y}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}},$$

e moltiplicando per $\frac{k}{y}$, e riducendo allo stesso denominatore il primo fattore del secondo membro, si trova $\frac{f^2k}{n^2-2f^2}=$

$$\frac{(n^2-f^2)k\sqrt{fh}+(n^2-2f^2)(a\,\text{cos}.\,\mu\sqrt{fh}+na)}{(n^2-2f^2)\sqrt{fh}}$$

$\times\left(\frac{k}{y}\right)^{2-\frac{n^2}{f^2}}$. Di quì si ricava $\left(\frac{y}{k}\right)^{2-\frac{n^2}{f^2}}=$

$$\frac{(n^2-f^2)k\sqrt{fh}+(n^2-2f^2)(a\,\text{cos}.\,\mu\sqrt{fh}+na)}{kf^2\sqrt{fh}},$$

e per fine $y=k\times$

$$\left(\frac{kf^2\sqrt{fh}}{(n^2-f^2)k\sqrt{fh}+(n^2-2f^2)(a\,\text{col}.\,\mu\sqrt{fh}+na)}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}}$$

$=r-c-\frac{na}{\sqrt{fh}}$, cioè $r=c+\frac{na}{\sqrt{fh}}+k\times$

$$\left(\frac{kf^2\sqrt{fh}}{(n^2-f^2)k\sqrt{fh}+(n^2-2f^2)(a\,\text{cos}.\,\mu\sqrt{fh}+na)}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}},$$

e sostituendo per k il suo valore $-c-\frac{na}{\sqrt{fh}}$ nasce $r=c+\frac{na}{\sqrt{fh}}-\left(c+\frac{na}{\sqrt{fh}}\right)\times$

$$\left(\frac{f^2(na+c\sqrt{fh})}{(n^2-f^2)(na+c\sqrt{fh})-(n^2-2f^2)(a\,\text{cos}.\,\mu\sqrt{fh}+na)}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}}.$$

Il che era ec.

Co-

COROLLARIO I.

128. Se manca il tubo ficchè fia $a = 0$, nafce $r = c - c\left(\frac{f^2}{n^2 - f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2 - 2f^2}}$, e quindi $c - r = c\left(\frac{f^2}{n^2 - f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2 - 2f^2}}$, che è l' efpreffione dell' altezza dell' acqua fopra il lume del vafo allorchè ha confeguito la maffima celerità, come fi è veduto anche al §. 98.

PROBLEMA XV.

129. *Stando fempre alle fteffe ipotefi, fi cerca il tempo, in cui l' acqua acquifterà la maffima velocità, nel cafo, che* f *fia picciolisfimo al paragone di* n.

SOLUZIONE.

Poichè fi ha proffimamente $\frac{n^2 u^2}{f^2} = 2c - 2a \text{ cof. } \mu - 2r$, ed è noto effere $dt = \frac{dr}{u} = \frac{n dr}{f\sqrt{(2c - 2a \text{ cof. } \mu - 2r)}}$, fi trova l' integrale $t = -\frac{n}{f}\sqrt{(2c - 2a \text{ cof. } \mu - 2r)} + \text{Coft.}$ Ma debb' effere $t = 0$ infieme con $r = 0$. Dunque Coft. $= \frac{n}{f}\sqrt{(2c - 2a \text{ cof. } \mu)}$; e in con-

conseguenza $t = \frac{n}{f}\left(\sqrt{(2c - 2a\,\text{cos}.\,\mu)} - \sqrt{(2c - 2a\,\text{cos}.\,\mu - 2r)}\right)$. In questo valore di t convien ora sostituire il valore di r di sopra ritrovato, ommesso però f^2, e $2f^2$ in confronto di n^2, ed in tal supposto si trova $r = c + \frac{na}{\sqrt{fh}} - \left(c + \frac{na}{\sqrt{fh}}\right) \times \left(\frac{f^2(na + c\sqrt{fh})}{n^2(c\sqrt{fh} - a\,\text{cos}.\,\mu\sqrt{fh})}\right)^{\frac{f^2}{n^2}}$. Osservando pertanto, che il termine $\left(\frac{f^2(na + c\sqrt{fh})}{n^2(c\sqrt{fh} - a\,\text{cos}.\,\mu\sqrt{fh})}\right)^{\frac{f^2}{n^2}}$ è una picciolissima quantità elevata ad un esponente pur picciolissimo, si dimostra con un ragionamento simile a quello del §. 107. (*), che quel termine è $= 1 +$

 log.

(*) Sia ω infinitesima, e parimente λ infinitesima: sarà $\omega^{\lambda} = 1 - \chi$, essendo χ infinitesima d'un cert' ordine indeterminabile, giacchè ω^{λ} non può essere $= 1$, altrimenti sarebbe $\omega = 1$, nè può essere $= 1 \pm a$ (essendo a finita), perchè allora sarebbe $\omega = (1 \pm a)^{\frac{1}{\lambda}}$, che è assurdo quando a è positiva, e parimente falso quando a è negativa e < 1, sicchè $1 - a$ fosse un rotto. Dun-

$$\log.\left(\frac{f^2(na+c\sqrt{fh})}{n^2(c\sqrt{fh}-a\ \text{cof.}\ \mu\sqrt{fh})}\right)^{\frac{f^2}{n^2}}.$$ Dunque $r = -$

$$\left(c+\frac{na}{\sqrt{fh}}\right)\log.\left(\frac{f^2(na+c\sqrt{fh})}{n^2(c\sqrt{fh}-a\ \text{cof.}\ \mu\sqrt{fh})}\right)^{\frac{f^2}{n^2}}$$
$$= -\ \frac{f^2(c\sqrt{fh}+na)}{n^2\sqrt{fh}} \times \qquad \log.$$

Dunque z è infinitefima. Dunque effendo $\log.(1-z) = -z$, farà $1-z = \log.(1-z) + 1 = 1 + \log.\ \omega\lambda$.

Che poi la quantità infinitefima ω non poffa effere uguale ad un rotto $\frac{a}{a+b}$ innalzato ad un efponente infinito n, fi dimoftra così: $\left(\frac{a}{a+b}\right)^n =$

$$\frac{a^n}{a^n+\frac{na^nb}{a}+\frac{n^2a^nb^2}{2a^2}+\frac{n^3a^nb^3}{2.3a^3}+\frac{n^4a^nb^4}{2.3.4a^4}+\text{ec.}}$$
$$=\frac{1}{1+\frac{nb}{a}+\frac{n^2b^2}{2a^2}+\frac{n^3b^3}{2.3a^3}+\frac{n^4b^4}{2.3.4a^4}+\text{ec.}}$$

$=$ ad un infinitefimo di altiffimo grado. Dunque non può effere $\omega = \left(\frac{a}{a+b}\right)^n$, altrimenti dividendo per ω farebbe l'unità uguale all' infinitefimo di altiffimo grado, quale refta tuttavia il quoziente del fecondo membro divifo per ω.

$\log.\left(\frac{f^2(na+c\sqrt{fh})}{n^2(c\sqrt{fh}-a\ \text{cos}.\ \mu\ \sqrt{fh})}\right)$. Ma si è trovato
$t=\frac{n}{f}\left(\sqrt{(2c-na\ \text{cos}.\mu)}-\sqrt{(2c-2a\ \text{cos}.\mu-2r)}\right)$
$=\frac{n\sqrt{(2c-2a\ \text{cos}.\mu)}}{f}\left(1-\sqrt{\left(1-\frac{2r}{2c-2a\ \text{cos}.\mu}\right)}\right)$
$=\frac{nr\sqrt{(2c-2a\ \text{cos}\ \mu)}}{f(2c-2a\ \text{cos}.\ \mu)}$, trascurando le potenze di
r come estremamente picciole; perciò sostituito il valore di r in questa espressione, trovasi $t=$
$\frac{f(c\sqrt{fh}+na}{n\sqrt{fh}\sqrt{(2c-2a\ \text{cos}.\mu)}}\log.\frac{n^2(c\sqrt{fh}-a\ \text{cos}.\mu\sqrt{fh})}{f^2(na+c\sqrt{fh})}$.
Il che era ec.

COROLLARIO I.

130. Se manca il tubo conico, cioè $a=0$, risulta $t=\frac{f}{n}\sqrt{\tfrac{1}{2}c}\times\log.\frac{n^2}{f^2}=\frac{f\sqrt{2c}}{n}\log.\frac{n}{f}$, come appunto nel §. 107, fatto quivi $\varphi=90°$.

COROLLARIO II.

131. Si rende più semplice l'espressione del tempo, se si ritengono i soli termini, che in essa sono moltiplicati per n, e si disprezzano gli altri; giacchè allora si ottiene $t=$
$\frac{a\sqrt{f}}{\sqrt{(2hc-2ha\ \text{cos}.\mu)}}\log.\frac{nc\sqrt{h}-na\ \text{cos}.\ \mu\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}$

PROBLEMA XVI.

132. *Stando tutto come sopra, ed essendo nota per un dato istante la velocità dell' acqua all' uscire dall'orifizio del tubo: cercasi di quanto sarà discesa nel vaso, quanta ne sarà sortita, e qual tempo sarà trascorso dal principio del moto fino a quel dato momento.*

SOLUZIONE.

1.° Si è già trovato (§. 117) $u^2 = \frac{f^2v^2}{n^2}$

$$= \frac{2f^2k}{n^2-2f^2}\left(\left(\frac{k}{y}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}} - \frac{y}{k}\right) +$$

$$\frac{2f^2a\cos.\mu\sqrt{fh}+2f^2na}{(n^2-f^2)\sqrt{fh}}\left(\left(\frac{k}{y}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}} - 1\right).$$

Posto pertanto $n^2 = n^2 - f^2 = n^2 - 2f^2$,

nascerà $v^2 = -2y + 2k\left(\frac{k}{y}\right)^{-\frac{n^2}{f^2}} -$

$2a\cos.\mu - \frac{2na}{\sqrt{fh}} + \left(2a\cos.\mu + \frac{2na}{\sqrt{fh}}\right)\times$

$\left(\frac{k}{y}\right)^{-\frac{n^2}{f^2}} = (2a\cos.\mu - 2c)\left(\frac{k}{y}\right)^{-\frac{n^2}{f^2}} -$

$2a\cos.\mu - \frac{2na}{\sqrt{fh}} - 2y = (2a\cos.\mu - 2c)\times$

$(k$

$$\left(\frac{k}{y}\right)^{-\frac{n^2}{f^2}} + 2c - 2a\cos.\mu - 2r =$$

$$(2a\cos.\mu - 2c)\left(\frac{k}{y}\right)^{-\frac{n^2}{f^2}} + 2c - 2a\cos.\mu,$$

trascurando $2r$ come assai picciolo; giacchè due volte giugne l' acqua alla velocità v, una volta avanti la massima velocità, l' altra dopo, e qui si assume v avanti la massima, quando cioè è picciolissima la r. Laonde $(2c - 2a\cos.\mu) \times \left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{n^2}{f^2}} = 2c - 2a\cos.\mu - v^2$; e quindi $y = k\left(\frac{2c - 2a\cos.\mu - v^2}{2c - 2a\cos.\mu}\right)^{\frac{f^2}{n^2}}$, vale a dire $r - c - \frac{na}{\sqrt{fh}} = -\left(c + \frac{na}{\sqrt{fh}}\right)\left(\frac{2c - 2a\cos.\mu - v^2}{2c - 2a\cos.\mu}\right)^{\frac{f^2}{n^2}}$

$$= -\left(c + \frac{na}{\sqrt{fh}}\right)\left(1 + \frac{f^2}{n^2}\log.\frac{2c - 2a\cos.\mu - v^2}{2c - 2a\cos.\mu}\right).$$

Dunque finalmente, poichè $\frac{cf^2}{n^2}$ può aversi per nulla, risulta $r = -\frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}}\log.\frac{2c - 2a\cos.\mu - v^2}{2c - 2a\cos.\mu}$ $= \frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}}\log.\frac{2c - 2a\cos.\mu}{2c - 2a\cos.\mu - v^2}$. Ciò si ritrova pu-

pure facendo uso dell' equazione (§. 120) $v^2 = \left(\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}} + 2c - 2a\cos.\mu\right)\left(1 - e^{-\frac{rn\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}}\right)$ $- 2r$; nella quale ommesse come picciolissime le quantità $2r$, $\frac{2af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}}$, risulta $v^2 = 2c - 2a\cos.\mu$ $- (2c - 2a\cos.\mu)\, e^{-\frac{rn\sqrt{h}}{af\sqrt{f}}}$, ovvero $-\frac{rn\sqrt{h}}{af\sqrt{f}} = \log.\frac{2c - 2a\cos.\mu - v^2}{2c - 2a\cos.\mu}$, ossia $r = \frac{af\sqrt{f}}{n\sqrt{h}}\log.\frac{2c - 2a\cos.\mu}{2c - 2a\cos.\mu - v^2}$.

2.° Per ritrovare la quantità d' acqua, che in tanto sarà uscita dall' apertura del tubo, basta moltiplicare per n l' espressione ora ritrovata di r, ed hassi $\frac{af\sqrt{f}}{\sqrt{h}}\log.\frac{2c - 2a\cos.\mu}{2c - 2a\cos.\mu - v^2}$.

3.° Il tempo si determina ricorrendo alla sua espressione $t = \frac{nr}{f\sqrt{(2c - 2a\cos.\mu)}}$ (§. 129), perchè quantunque questa rappresenti il tempo, che corrisponde alla massima velocità, è però chiaro, che nell' ipotesi di f picciolissimo in confronto di n si giugnerà alla medesima formola mediante l' integrazione di $dt = \frac{dr}{u}$. Sostituito pertanto il valore di $r = -\frac{(na + c\sqrt{fh})f^2}{n^2\sqrt{fh}} \times$ log.

$\log. \frac{2c - 2a \cos. \mu - v^2}{2c - 2a \cos. \mu}$ nella suddetta espressione, si ha $t = - \frac{(na + c\sqrt{fh})\sqrt{f}}{n\sqrt{(2c - 2a \cos. \mu)}\sqrt{h}} \times$

$$\log. \frac{2c - 2a \cos. \mu - v^2}{2c - 2a \cos. \mu} = \frac{(na + c\sqrt{fh})\sqrt{f}}{n\sqrt{(2c - 2a \cos. \mu)}\sqrt{h}} \times$$

$\log. \frac{2c - 2a \cos. \mu}{2c - 2a \cos. \mu - v^2}$, ovvero prossimamente

$$= \frac{a\sqrt{f}}{\sqrt{(2c - 2a \cos. \mu)}\sqrt{h}} \log. \frac{2c - 2a \cos. \mu}{2c - 2a \cos. \mu - v^2}.$$

Il che era ec.

133. Il Sig. DANIELLO BERNOULLI è stato il primo a mettere alla prova dell' esperienza la delicata Teoria da noi qui esposta intorno alla legge, con cui si accelera il moto dell' acqua dal primo istante fino al momento della massima celerità. Gli altri Scrittori Idraulici si erano contentati di considerare il movimento dell' acqua nello stato di permanenza, a cui l' acqua non giugne se non dopo qualche tempo, sempre per altro assai breve. Gli sperimenti del Sig. BERNOULLI sono registrati nella Sez. IV. della sua *Idrodinamica*, e il metodo da lui adoprato è il seguente: Sprizzava l' acqua in direzione orizzontale dall' apertura d' un tubo adattato ad un vaso; e nella Fig. 35 *MN* rappresenta tutta la vena d' acqua nel momento, che ha acquistato la sua maggiore velocità, e però *DN* esprime la massima ampiezza del getto.

Di-

Direttamente fotto l' apertura *M* del tubo fi collocava un piattello per modo che la linea verticale *MD* paffaffe pel centro di quello. Effendo ora *DR* il femidiametro del piattello, tutta quell' acqua, che non era ancor giunta ad acquiftare la velocità corrifpondente all' ampiezza *DR*, dovea cadere nel piatto. Dall' ampiezza *DR* calcolava BERNOULLI la velocità dell' acqua pel momento che la vena giugneva fino ad *R*, e dall' ampiezza maffima *DN* calcolava la velocità maffima per una regola, che anche noi riferiremo a fuo luogo. Perlocchè nella formola $\frac{af\sqrt{f}}{\sqrt{h}}\log.\frac{2c-2a\cos.\mu}{2c-2a\cos.\mu-v^2}$, che efprime la quantità d' acqua ufcita nel tempo che la vena arriva fino in *R*, fatto cos. $\mu = 0$, perchè il tubo è orizzontale, $c =$ all' altezza dovuta alla maffima velocità (giacchè queft' altezza non differifce, come fi è veduto, che pochiffimo da quella dell' acqua fopra il foro), ed $a =$ all' altezza dovuta alla velocità v, offia corrifpondente all' ampiezza *DR*, e però pofto $v^2 = 2a$, la formola fi riduce in $\frac{af\sqrt{f}}{\sqrt{h}}\log.\frac{c}{c-a}$.

Nella prima efperienza il tubo era conico, divergente all' infuori, e la fua lunghezza a conteneva 125 di quelle parti, che fi erano prefe per mifura comune, l' interna apertura h conteneva 133, e l' efterna f 227 di tali particel-

le

le quadrate. L'altezza BF dell'acqua sopra l'asse del tubo era di 433 parti, $DN = 287$, $DR = 206$, $DM = 146$. Raccolta in un cannello cilindrico di diametro $= 8\frac{1}{4}$ parti tutta l'acqua cascata nel piatto, si trovò, che arrivava nel cannello all'altezza di 210 parti, e che in conseguenza occupava uno spazio di $11916\frac{1}{2}$ parti cubiche. Pertanto l'altezza dovuta alla velocità massima dell'acqua, che arriva in N è $= \frac{DN^2}{4DM} = 141$, e l'altezza dovuta alla velocità della vena che giugne soltanto in R è $= \frac{DR^2}{4DM} = 73$: laonde prendendo ora $141 = c$, $73 = \alpha$, sarà $\frac{c}{c-\alpha} = \frac{141}{68}$; $\log. \frac{c}{c-\alpha} = 0{,}3167102 \times 2{,}302585 = 0{,}729252$; $\sqrt{\frac{f}{h}} = 1{,}306$; $af = 28375$. Dunque $\frac{af\sqrt{f}}{\sqrt{h}} \log. \frac{c}{c-\alpha} = 28375 \times 1{,}306 \times 0{,}729252 = 26964$ parti cubiche, cioè più che due volte il risultato dell'esperienza. Un divario sì grande dell'esperienza dalla Teoria del Sig. BERNOULLI viene spiegato così: La formola per la quantità d'acqua $= \frac{af\sqrt{f}}{\sqrt{h}} \log. \frac{c}{c-\alpha}$ non può aver luogo se non nell'ipotesi,

che

che il movimento dell' acqua non ſoggiaccia ad alcun ſenſibile ritardo o impedimento, e ſolo in queſto ſuppoſto può eſſere $c = \frac{DN^2}{4DM}$, ed $\alpha = \frac{DR^2}{4DM}$. Ma a motivo appunto degli oſtacoli, che allentano irreparabilmente un tal moto, eſſer dee $\frac{DN^2}{4DM} < c$, e $\frac{DR^2}{4DM} < \alpha$, come in fatti ſi trova. E' bensì vero, che quando ſolo ſuſſiſteſſe la proporzione $c : \alpha :: DN^2 : DR^2$, e quindi $\alpha = \frac{DR^2}{DN^2} \cdot c$, ſi avrebbe altresì $\frac{c}{c-\alpha} = \frac{DN^2}{DN^2 - DR^2}$, e il calcolo ſi accorderebbe appuntino coll' eſperienza. Ma è d'uopo riflettere, che gl' impedimenti al moto creſcono col creſcere della velocità, e quando la vena o il getto arriva in R il ritardo non è ancora sì forte come ſi fa in appreſſo: e di qui facilmente s' inferiſce dover eſſere $\alpha < \frac{DR^2}{DN^2} \cdot c$; donde deriva $\log. \frac{DN^2}{DN^2 - DR^2} < \log. \frac{c}{c-\alpha}$, e però la quantità d' acqua eſſer dee minore di quel che ſarebbe nell' ipoteſi della proporzione $c : \alpha :: DN^2 : DR^2$. Si ſarebbe potuto ritenere $c = 433$, ed allora aſſumere $\alpha = \frac{DR^2}{DN^2} \cdot c = 223$; il che avrebbe dato il me-

deſimo

desimo risultato. Ma per l' allegato ritardo dee α pigliarsi più picciolo, e il calcolo si accorda coll' esperienza se si prende α all' incirca $=$ 120 parti.

Quantunque io non ritrovi niente a ridire intorno a questo discorso di BERNOULLI, parmi per altro essere troppo forte la diminuzione del valore di α per potersi a questa sola circostanza attribuire tutto il divario del calcolo dall' esperimento; e porto opinione, che il già altrove indicato acceleramento dell' acqua, che precede per l' impulso di quella che segue, abbia in tal effetto la sua parte non affatto insensibile. Il secondo esperimento di BERNOULLI viene all' appoggio di questo mio pensamento.

Qui il tubo non è più conico, ma cilindrico di 130 parti di lunghezza; l' altezza dell' acqua sopra l' asse del tubo è pure di 130 parti; l' altezza $DM = 553$; l' ampiezza $DN = 453$; e $DR = 297$. La quantità d' acqua è in tal caso $= af \log. \frac{c}{c-\alpha}$; e si trova $\frac{DN^2}{4DM} = 93$; $\frac{DR^2}{4DM} = 40$. Inoltre è $f =$ 284 particelle quadrate; onde $af = 36920$; $\frac{c}{c-\alpha} = \frac{93}{53}$; $\log. \frac{93}{53} = 0{,}2442070 \times 2{,}302585 = 0{,}562298$. Perciò la quantità d' acqua è $= 36920 \times 0{,}562298 = 20760$ particelle cubiche. Ora l' esperienza ne

diede

diede 15950, cioè circa $\frac{4}{5}$ della quantità calcolata: differenza molto minore della precedente, dove la quantità d' acqua effettiva non giugneva alla metà della calcolata. Ma se la circostanza dal Sig. BERNOULLI indicata fosse la sola causa della discrepanza dovrebbe questa esser maggiore nel secondo esperimento che nel primo. Qui *DR* non arriva ad essere $\frac{2}{3}$ di *DN*, e nella prima esperienza era *DR* pressocchè $\frac{3}{4}$ di *DN*. Qui adunque la differenza de' ritardamenti, cui l' acqua soggiace nel giungere in *R*, ed in *N*, maggiore esser dee che nella prima esperienza: e quindi maggiore di prima avrebbe dovuto essere la discrepanza tra i risultati del fatto e della teoria. Ma nella causa da me divisata della differenza fra la quantità d' acqua calcolata, ed osservata, tutto cammina d'accordo. Ivi l' altezza dell' acqua era 433, qui 130: ivi la massima velocità osservata era dovuta all' altezza di 141, qui di 93: ivi il tubo conico era un poco più corto che qui il cilindrico; tutte circostanze, che dovendo produrre un acceleramento più vigoroso nell' acqua davanti per l' urto della seguente dovevano lasciar cadere proporzionalmente meno d' acqua nel sottoposto piatto, che non in questo secondo esperimento.

SE-

SEZIONE III.

De' vasi, e tubi mantenuti costantemente pieni.

PROBLEMA XVII.

134. *Rimanendo tutto come nel Probl. V., ma essendo sempre riparata l' acqua che esce dal vaso o tubo* APFB (*Fig.* 29.), *per modo che si conservi costantemente pieno fino in* AB: *si vuol sapere la velocità dell' acqua dopo che tanta ne sarà sortita, quanta contenevasi dallo spazio* AKVB. Fig. 29.

SOLUZIONE.

Rintracciata anche in questo caso, come si è fatto nel §. 88 un' equazione, la quale esprima la pressione, che soffre l' acqua in ciascuna sezione NT del tubo, ritrovasi come quivi $p = A - b + x + \frac{n^2 u^2}{2f^2} - \frac{n^2 u^2}{2z^2} - \frac{n^2 u\, du}{q\, dr} \int \frac{ds}{z}$. Suppongasi, che sulla superior superficie prema una forza equivalente al peso d'una colonna d'acqua avente per base la stessa AB, e l' altezza $= P$: e poichè il tubo rimane sempre pieno d' acqua fino ad AB, diventerà $p = P$ allorchè sarà $x = o$, $z = AB = h$, ed $s = o$. Laonde la predetta equazione

si trasforma in $P = A - b + \frac{n^2u^2}{2f^2} - \frac{n^2u^2}{2h^2}$ $- \frac{n^2udu}{qdr}\int\frac{ds}{z}$; nella quale l' integrale $\int\frac{ds}{z}$ viene ad essere una grandezza costante, giacchè dopo l' integrazione dee farsi $z = h$, $s = o$. Se ora si fa $v =$ alla velocità dell' acqua nell' atto di scagliarsi dal lume, $\lambda =$ alla lunghezza del prisma d' acqua sortito, che riempiva lo spazio $AKVB$, è manifesto dover essere $u^2 = \frac{f^2v^2}{n^2}$, $qdr = fd\lambda$; e sostituiti questi valori nella precedente equazione si ottiene $P = A - b + \frac{1}{2}v^2 - \frac{f^2v^2}{2h^2}$ $- \frac{fvdv}{d\lambda}\int\frac{ds}{z}$. Posto $\int\frac{ds}{z} = M$, e moltiplicando per $2h^2d\lambda$ si ha $2Ph^2d\lambda = 2h^2Ad\lambda - 2bh^2d\lambda + (h^2 - f^2)v^2d\lambda - 2fh^2Mvdv$; e di qui $d\lambda = \frac{2fh^2Mvdv}{2h^2(A-P-b)+(h^2-f^2)v^2}$. Che se supponsi come d' ordinario niun' altra forza premente in AB fuor di quella dell' atmosfera e la suprema superficie solamente di alcuni piedi più alta dell' orifizio, allora divenendo $A = P$, si ritrova $d\lambda = -\frac{2fh^2Mvdv}{2h^2b-(h^2-f^2)v^2}$ $= -\frac{2fMvdv}{2b-\left(1-\frac{f^2}{h^2}\right)v^2}$. Dunque passando all' in-

integrazione nafce $\lambda = \frac{fh^2M}{h^2-f^2}\log.\left(2h^2b - (h^2-f^2)v^2\right)$ + Coft. E ficcome v, λ fvanifcono infieme, rifulta Coft. $= -\frac{fh^2M}{h^2-f^2} \times \log. 2h^2b$. Laonde $\lambda = \frac{fh^2M}{h^2-f^2} \times \log. \frac{2h^2b-(h^2-f^2)v^2}{2h^2b}$, ovvero $\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M} = \log. \frac{2h^2b-(h^2-f^2)v^2}{2h^2b}$. Quindi prefo e per numero, il di cui logaritmo iperbolico è uguale all' unità, trovafi $e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}} = \frac{2h^2b-(h^2-f^2)v^2}{2h^2b}$. Dunque per ultimo

$$v^2 = -\frac{2h^2be^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}} + 2h^2b}{b^2-f^2} = \frac{2h^2b}{h^2-f^2}\left(-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}} + 1\right),$$

che efprime la relazione fra la velocità dell' ufcita, e la lunghezza del prifma d' acqua ufcito dal foro, che riempiva la propofta capacità *AKVB*. Il che era ec.

135. Confiderando la natura dell' integrale $\int\frac{ds}{z} = M$, è facile accorgerfi, che ne' cafi or-

 dinarj

dinarj sarà sempre questo una quantità negativa, e per conseguenza il termine $e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}$ diverrà tanto più picciolo, quanto più grande sarà λ, per modo che qualora possa disprezzarsi f^2 in confronto di h^2, nascerà $v^2 = \frac{2h^2b}{h^2-f^2}\left(1 - e^{\frac{\lambda}{fM}}\right)$; donde, essendo grandissimo l'esponente negativo $\frac{\lambda}{fM}$, vale a dire picciolissimo il termine $e^{\frac{\lambda}{fM}}$, si ricava $v^2 = \frac{2h^2b}{h^2-f^2}$ prossimamente; il che si accorda col Problema IV. Ma qui è da notarsi una particolarità di somma importanza nel presente argomento. La velocità v a parlare rigorosamente non giugne mai ad uguagliare la quantità $\sqrt{\frac{2h^2b}{h^2-f^2}}$, ma vi si va sempre più avvicinando quanto più dura il movimento, o quanto maggiore è l'acqua erogata. Questo poi continuo aumento di celerità nell'acqua, che scaturisce dal foro, dee per necessità essere accompagnato da un aumento pure continuo di velocità dell'acqua che scorre per la suprema superficie AB, essendo evidente, che col crescere di v dee

dee pur crefcere $\frac{fv}{h}$. Per foddisfare adunque alle condizioni prefuppofte nel calcolo, farà meftiere alla nuov' acqua introdotta nel tubo, in rifarcimento di quella che forte, dare un tal moto e direzione, che fcorra per la fuprema fezione AB a feconda della linea centrale colla velocità $\frac{fv}{h}$. Siccome però in pratica ciò non potrebbe così di leggieri effettuarfi, giacchè all' oppofto l' acqua fi fa accorrere lateralmente in AB fenza avere velocità alcuna in direzione della linea centrale Ii, farà efpediente per applicare la formola ritrovata al cafo pratico, fiffare $\frac{fv}{h}$, ovvero $\frac{f^2v^2}{h^2} = o$, ed allora l' equazione differenziale $d\lambda = \frac{-2fMvdv}{2b - \left(1 - \frac{f^2}{h^2}\right)v^2}$ diventa $d\lambda = -\frac{2fMvdv}{2b - v^2}$, ed integrando $\lambda = fM \log. \frac{2b - v^2}{2b}$; donde fi trae tofto

$$v^2 = 2b\left(1 - e^{\frac{\lambda}{fM}}\right).$$

COROLLARIO I.

136. Per applicare a' cafi particolari la formola

mola generale $v^2 = \frac{2h^2b}{h^2-f^2}\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)$ basta prendere a dovere l' integrale M e sostituire un tal valore nella formola. Così se il tubo è dappertutto di uguale ampiezza $z=h$, essendo generalmente $M = \frac{s-\Delta}{h}$ (posto $\Delta =$ a tutta la linea centrale), e pel Problema precedente fatto $s=0$, e però $M = -\frac{\Delta}{h}$; se si sostituisce questo valore in quello di v^2, si trova $v^2 = \frac{2h^2b}{h^2-f^2}\left(1-e^{-\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh\Delta}}\right)$.

Per l'altro caso, in cui l' acqua, accorrendo lateralmente a riparare la perdita di quella che sorte, non ha alcuna velocità nella superficie suprema, si trova $v^2 = 2b\left(1-e^{-\frac{\lambda h}{f\Delta}}\right)$.

COROLLARIO II.

137. Se il vaso è un prisma retto verticale con un tubo conico lateralmente annesso verso il fondo, come nel Problema XII., allora in vece di b si scrive $c - a\cos.\mu$, ed in vece di M si ritrova (*) $\frac{s-c}{h} - \frac{a}{\sqrt{fl}}$, cioè

(*) Ciò che nel Problema XIII. si è chiamato n

cioè $\frac{-c\sqrt{fl}-ha}{h\sqrt{fl}}$, fatta come deesi $s = o$.
Perlocchè nascerà $v^2 = \frac{2h^2(c - a \cos.\mu)}{h^2 - f^2} \times$
$\left(1 - e^{\frac{-(h^2-f^2)\lambda\sqrt{fl}}{(c\sqrt{fl}+ha)fh}}\right)$.

Pel caso dell'afflusso laterale dell'acqua, si trova

$$v^2 = 2(c - 2\cos.\mu)\left(1 - e^{\frac{-h\lambda\sqrt{fl}}{fha + fc\sqrt{fl}}}\right).$$

PROBLEMA XVIII.

138. *Restando tutto come dianzi; ritrovare il tempo, in cui l'acqua uscente dal lume arriva a conseguire una data celerità.*

SOLUZIONE.

Poichè si fa essere $dt = \frac{d\lambda}{v}$, e si è trovato $d\lambda = -\frac{2fh^2 Mvdv}{2h^2b-(h^2-f^2)v^2}$, sarà $dt = -$
$\frac{2fh2Mdv}{2h^2b-(h^2-f^2)v^2} = \frac{-fhMdv}{\sqrt{2b}[\sqrt{2h^2b}+v\sqrt{(h^2-f^2)}]}$
$\frac{-fhMdv}{\sqrt{2b}[\sqrt{2h^2b}-v\sqrt{(h^2-f^2)}]}$. Dunque integrando sarà $t = \frac{fhM}{\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}\log.\left(\sqrt{2h^2b}\right.$

 —

n qui è h, e ciò che ivi si è detto h qui per distinguerlo si dirà l.

$- v\sqrt{(h^2-f^2)}\Big) - \frac{fhM}{\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}\log.\Big(\sqrt{2h^2b} + v\sqrt{(h^2-f^2)}\Big) + \text{Cost.} = \frac{fhM}{\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}} \times \log.\frac{\sqrt{2h^2b} - v\sqrt{(h^2-f^2)}}{\sqrt{2h^2b} + v\sqrt{(h^2-f^2)}}$. Il che era ec.

COROLLARIO I.

139. Nel caſo dell' affluſſo laterale, cioè della velocità nulla nella ſezione ſuprema, ſi ha $d\lambda = -\frac{2fMvdv}{2b-v^2}$. Dunque $dt = -\frac{2fMdv}{2b-v^2} = -\frac{fMdv}{(\sqrt{2b}-v)\sqrt{2b}} - \frac{fMdv}{(\sqrt{2b}+v)\sqrt{2b}}$; ed integrando $t = \frac{fM}{\sqrt{2b}} \times \log.\frac{\sqrt{2b}-v}{\sqrt{2b}+v}$.

COROLLARIO II.

140. Se il vaſo ſi ſuppone priſmatico, così che M ſia $= -\frac{\Delta}{h}$, naſce $t = -\frac{f\Delta}{\sqrt{(2bh^2-2bf^2)}}\log.\frac{\sqrt{2h^2b}-v\sqrt{(h^2-f^2)}}{\sqrt{2h^2b}+v\sqrt{(h^2-f^2)}} = \frac{\Delta f}{\sqrt{(2h^2b-2f^2b)}}\log.\frac{\sqrt{2h^2b}+v\sqrt{(h^2-f^2)}}{\sqrt{2h^2b}-v\sqrt{(h^2-f^2)}}$. E per l'altro caſo ſi trova $t = \frac{f\Delta}{h\sqrt{2b}}\log.\frac{\sqrt{2b}+v}{\sqrt{2b}-v}$.

Co-

COROLLARIO III.

141. Dall' equazione del Corollario antecedente ſi trae $\frac{t\sqrt{(2h^2b - 2f^2b)}}{f\Delta} =$ log. $\frac{\sqrt{2h^2b} + v\sqrt{(h^2 - f^2)}}{\sqrt{2h^2b} - v\sqrt{(h^2 - f^2)}}$, e quindi

$$e^{\frac{t\sqrt{(2h^2b - 2f^2b)}}{f\Delta}} = \frac{\sqrt{2h^2b} + v\sqrt{(h^2 - f^2)}}{\sqrt{2h^2b} - v\sqrt{(h^2 - f^2)}},$$

e finalmente

$$v = \sqrt{\frac{2h^2b}{h^2 - f^2}} \left\{ \frac{e^{\frac{t\sqrt{(2h^2b - 2f^2b)}}{f\Delta}} - 1}{e^{\frac{t\sqrt{(2h^2b - 2f^2b)}}{f\Delta}} + 1} \right\},$$

vale a dire

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{h^2b}{h^2 - f^2} \left\{ \frac{e^{\frac{t\sqrt{(2h^2b - 2f^2b)}}{f\Delta}} - 1}{e^{\frac{t\sqrt{(2h^2b - 2f^2b)}}{f\Delta}} + 1} \right\}.$$

Poſto pertanto $\frac{\sqrt{(2h^2b - 2f^2b)}}{f\Delta} = m$, ſi ottiene $\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{h^2b}{h^2 - f^2}\left(\frac{e^{mt} - 1}{e^{mt} + 1}\right)^2$

$=$

$$= \left\{ \frac{1 - \frac{1}{e^{mt}}}{1 + \frac{1}{e^{mt}}} \right\}^2 \frac{h^2 b}{h^2 - f^2}.$$

Convien qui osservare, che quanto più cresce t, tanto più si sminuisce $\frac{1}{e^{mt}}$, e però tanto maggiormente cresce $1 - \frac{1}{e^{mt}}$, e viceversa tanto più scema $1 + \frac{1}{e^{mt}}$. Il perchè la frazione $\left(\frac{1-e^{-mt}}{1+e^{-mt}} \right)^2$ va sempre viepiù crescendo a misura che diventa maggiore il tempo t, per modo che diventando $t = \infty$, nasce $\left(\frac{1-e^{-mt}}{1+e^{-mt}} \right)^2 = 1$. Di qui apparisce, che $\frac{1}{2}v^2$ si va accostando sempre più al valore di $\frac{h^2 b}{h^2 - f^2}$ oltre ogni assegnabile differenza, e che non giugne a pienamente uguagliarvisi se non dopo un tempo infinito, cioè a dire non mai. È adunque $\frac{h^2 b}{h^2 - f^2}$ *limite* di $\frac{1}{2}v^2$, ovvero il massimo valore, che queste può

può conseguire, ma che propriamente non conseguisce mai, perchè ne è sempre minore:

Per convertire poi t in minuti secondi nella formola del valore di $\frac{1}{2}v^2$, si fa questo discorso: Chiamato s lo spazio descritto da un grave cadente dalla quiete, nel tempo τ si ha dalla Meccanica $\tau = \sqrt{2s}$ posta la gravità acceleratrice $= 1$, come abbiamo sempre supposto. Si osservi pertanto, che l' esponente $\frac{t\sqrt{(2h^2b - 2f^2b)}}{f\Delta}$ del numero e dovendo essere un numero astratto è forza, che t sia la radice quadrata d'una grandezza lineare, e però faremo $t = \sqrt{\alpha}$. Quindi avremo τ, t espressi in quantità omogenee $\sqrt{2s}$, $\sqrt{\alpha}$, le quali saranno proporzionali al numero de' secondi di ambedue i tempi. Dunque $\sqrt{2s}$: $\sqrt{\alpha} : : \tau'' : t''$, vale a dire $\sqrt{\alpha} = \frac{t''\sqrt{2s}}{\tau''}$.

E poichè posto $\tau'' = 1''$, diviene $s = 15,1$ pied. $= g$; perciò nasce $\sqrt{\alpha} = t''\sqrt{2g}$: e sostituito questo valore in luogo di t, ovvero di $\sqrt{\alpha}$ nel valore $\frac{1}{2}v^2$, risulta questo $=$

$$\frac{h^2b}{h^2-f^2}\left\{\frac{e^{\frac{2t''\sqrt{(gh^2b-gf^2b)}}{f\Delta}}-1}{e^{\frac{2t''\sqrt{(gh^2b-gf^2b)}}{f\Delta}}+1}\right\}^2.$$ Se ora si esa-

mina

mina il numero $\frac{2\sqrt{(gh^2b-gf^2b)}}{f\Delta}$ si scorge tosto, esser questo assai grande tutte le volte che f sia picciolo in confronto di h, e Δ non molto grande in paragone di g, e di b. In questo caso sarà molto grande l'esponente di e quand' anche t sia per esempio $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ d'un secondo. Per la qual cosa riuscirà molto grande il numero $e^{\frac{2t''\sqrt{(gh^2b-gf^2b)}}{f\Delta}}$ anche pigliando picciolo il t. E perciò appunto il numero

$$\left\{\frac{e^{\frac{2t''\sqrt{(gh^2b-gf^2b)}}{f\Delta}}-1}{e^{\frac{2t''\sqrt{(gh^2b-gf^2b)}}{f\Delta}}+1}\right\}^2$$

potrà riguardarsi senza error sensibile come $=1$. Da ciò apparisce, che l'altezza dovuta alla velocità, con cui l'acqua sbocca dall'apertura del vaso, dentro un tempo brevissimo, dopo il principio del moto, si avvicina tanto al suo limite, che di pochissimo ne differisce: ond'è, che una tale velocità dopo un tempo pressocchè impercettibile può giustamente riputarsi uniforme.

COROLLARIO IV.

142. Supposto il tubo cilindrico verticale, sicchè M sia $= -\frac{b}{h}$, si trova

t

$$t = \frac{fb}{\sqrt{(2h^2b - 2f^2b)}} \log. \frac{\sqrt{2h^2b} + v\sqrt{(h^2 - f^2)}}{\sqrt{2h^2b} - v\sqrt{(h^2 - f^2)}};$$

e pel caso della velocità nulla nella superficie suprema si ricava $t = \frac{fb}{h\sqrt{2b}} \log. \frac{\sqrt{2b} + v}{\sqrt{2b} - v}$.

COROLLARIO V.

143. Se il vaso è prismatico verticale con un tubo conico applicato verso il fondo sotto l' angolo μ fatto colla verticale, allora essendo $M = \frac{-ha - c\sqrt{fl}}{h\sqrt{fl}}$, e $b = c - a \cos. \mu$ la formola $t = \frac{fhM}{\sqrt{2}\sqrt{(h^2 - f^2)}} \times$ $\log. \frac{\sqrt{2h^2b} - v\sqrt{(h^2 - f^2)}}{\sqrt{2h^2b} + v\sqrt{(h^2 - f^2)}}$ si cangia in quest' altra $t = \frac{ha\sqrt{f} + cf\sqrt{l}}{\sqrt{(2c - 2a\cos\mu)}\sqrt{(h^2 - f^2)}\sqrt{l}} \times$ $\log. \frac{h\sqrt{(2c - 2a\cos\mu)} + v\sqrt{(h^2 - f^2)}}{h\sqrt{(2c - 2a\cos\mu)} - v\sqrt{(h^2 - f^2)}}$. Per l' altro caso della velocità nulla nella suprema superficie la formola $t = \frac{fM}{\sqrt{2b}} \log. \frac{\sqrt{2b} - v}{\sqrt{2b} + v}$ si trasforma in $t = \frac{ha\sqrt{f} + cf\sqrt{l}}{h\sqrt{(2c - 2a\cos\mu)}\sqrt{l}} \times$ $\log. \frac{\sqrt{(2c - 2a\cos.\mu)} + v}{\sqrt{(2c - 2a\cos.\mu)} - v}$.

ESEMPIO I.

144. Se il vaso è un prisma verticale, do-

dove in conseguenza $\Delta = b$, il quale sia tant' alto, quanta è la caduta d' un grave in un secondo, cioè $b = g$, ed abbia la base $h = 9f$, per modo che $\frac{2\sqrt{(gh^2 b - gf^2 b)}}{f\Delta} = 2\sqrt{\frac{h^2 - f^2}{f^2}}$ diventi $2\sqrt{80}$, in quest' ipotesi preso $t = \frac{1}{2}''$, si trova $2t''\sqrt{\frac{h^2 - f^2}{f^2}} = \sqrt{80} = 8,9442$. Quindi si ritrae $\frac{1}{2}v^2 = \frac{81 b}{80} \times \left(\frac{e^{8,9442} - 1}{e^{8,9442} + 1}\right)^2$. Ora

log. e = log. 2,718 0,4342494
log. $e^{8,9442}$ = 8,9442 log. e . . . 3,8838
$e^{8,9442}$ = ... 7652

Laonde $\frac{1}{2} v^2 = \left(\frac{7651}{7653}\right)^2 \cdot \frac{81 b}{80} = 0,998 \cdot \frac{81 b}{80}$; e di qui apparisce quanto si accosta $\frac{1}{2} v^2$ al suo massimo valore $\frac{81 b}{80}$, cioè al suo limite nel breve spazio di un mezzo secondo, anche nel supposto che l' apertura sia assai più grande che non si costuma nelle sperienze ordinarie.

Essendo inoltre $0,998 \cdot \frac{81 b}{80} = 1,01\, b$ si scorge, che l' altezza dovuta alla velocità dell' uscita dal foro arriva in un mezzo secondo ad ugua-

uguagliare l'altezza del vaso col divario d'un solo centesimo.

Se nel vaso prismatico verticale si piglia $h = 100f$, $b = 4$ pied.; $t = 0{,}1''$; allora può disprezzarsi f^2 in confronto di h^2, e però diventa $\frac{2t''\sqrt{(gh^2b - gf^2b)}}{fb} = 0{,}2.100\sqrt{\frac{g}{b}} = 10\sqrt{g}$. Dunque $\frac{1}{2}v^2 = b\left(\frac{e^{10\sqrt{g}} - 1}{e^{10\sqrt{g}} + 1}\right)^2 = b$ senza alcun errore sensibile, giacchè $e^{10\sqrt{g}}$ è visibilmente un numero eccessivamente grande.

ESEMPIO II.

145. Supposto, che il vaso sia un cilindro retto verticale, nel quale sia l'altezza $b = \Delta = 15{,}1$ pied.; $\frac{f}{h} = \frac{1}{25}$; l'altezza dovuta alla velocità v sia $= \frac{99}{100}b$ talmente che $v = \sqrt{\frac{2\times 99\, b}{100}}$. Si otterrà pel tempo t in secondi (142) l'espressione $\frac{t}{\sqrt{2g}} = \frac{t}{\sqrt{30{,}2}} = \frac{1}{2\sqrt{(25^2-1)}} \times$

$$\log.\frac{1 + \sqrt{\left(\frac{25^2-1}{25^2}\right)}\sqrt{\frac{99}{100}}}{1 - \sqrt{\left(\frac{25^2-1}{25^2}\right)}\sqrt{\frac{99}{100}}} = \frac{1}{50}\log.199$$

a un dipresso. Per l'altro caso si ha $\frac{t}{\sqrt{30{,}2}} = \frac{1}{50}$

$\frac{1}{50}\log.\frac{1+\sqrt{0,99}}{1-\sqrt{0,99}}=\frac{1}{50}\log.199$. Dal che si scorge, che in ambedue i casi il tempo è pochissimo differente. Ora è noto, che il logaritmo iperbolico di 199 è uguale al Briggiano moltiplicato per 2,302585, cioè log. 199 $=$ 2,2988531 $\times$ 2,302585 $=$ 5,2931. Dunque $\frac{1}{50}\log.199=0,10586''$. Di qui apparisce, quanto rapidamente anche in questo caso cresce la velocità dell'acqua, giacchè in meno di $\frac{1}{9}$ di secondo divien tale da esser dovuta a $\frac{99}{100}$ dell'altezza sopra l'orifizio.

ESEMPIO III.

146. Molto meno rapido è l'aumento di velocità ne' lunghi condotti d'acqua. Così in un condotto cilindrico di 1104 piedi di lunghezza, nel quale l'altezza della sezione suprema sopra l'orifizio sia come dianzi di 15,1 piedi, e il rapporto dell'area del lume alla sezione del cilindro sia $\frac{1}{25}$, l'acqua che sbocca dall'apertura non giugne a conseguire la velocità dovuta all'altezza $\frac{99}{100}b$ se non se nel tempo di 7 in 8 secondi: imperciocchè essendo in questo caso $\frac{f}{h}=\frac{1}{25}$; $\Delta=1104$ pied.; $b=$ 15,1 pied., risulta $\frac{t}{\sqrt{30,2}}=\frac{t}{\sqrt{a}\sqrt{\frac{15,1}{1104}}}=$

$$\frac{1104}{2 \times 25 \times 15,1} \log. 199 = \frac{73,1}{50} \log. 199 =$$

$$\frac{73,1 \times 5,2931}{50} = \frac{386,925}{50} = 7,73855''.$$

PROBLEMA XIX.

147. *Dall' apertura di un vaso mantenuto costantemente pieno sgorga un prisma d' acqua di data lunghezza: cercasi il tempo trascorso.*

SOLUZIONE.

Poichè si ha $dt = \frac{d\lambda}{v}$, e pel §. 136,

$$v = \frac{h\sqrt{2b}}{\sqrt{(h^2 - f^2)}}\left(1 - e^{\frac{(h^2 - f^2)\lambda}{fh^2 M}}\right)^{\frac{1}{2}},$$ si

ottiene $$dt = \frac{d\lambda\sqrt{(h^2 - f^2)}}{h\sqrt{2b}\sqrt{\left(1 - e^{\frac{(h^2 - f^2)\lambda}{fh^2 M}}\right)}}.$$

Per integrare quest' equazione faccio

$$\sqrt{\left(1 - e^{\frac{(h^2 - f^2)\lambda}{fh^2 M}}\right)} = y,$$ e prendendo i

differenziali ottengo $$- \frac{\frac{(h^2 - f^2)}{2fh^2 M} e^{\frac{(h^2 - f^2)\lambda}{fh^2 M}} d\lambda}{\sqrt{\left(1 - e^{\frac{(h^2 - f^2)\lambda)}{fh^2 M}}\right)}}$$

V =

$= dy$, cioè $\dfrac{d\lambda}{\sqrt{\left(1 - e^{\frac{(h^2 - f^2)}{fh^2 M}}\right)}} = -$

$\dfrac{2fh^2 M dy}{(h^2 - f^2) e^{\frac{(h^2 - f^2)\lambda}{fh^2 M}}} = \dfrac{-2fh^2 M dy}{(h^2 - f^2)(1 - y^2)}$,

per essere $e^{\frac{(h^2 - f^2)\lambda}{fh^2 M}} = 1 - y^2$. Dunque $dt =$

$\dfrac{d\lambda \sqrt{(h^2 - f^2)}}{h\sqrt{2b}\sqrt{\left(1 - e^{\frac{(h^2 - f^2)\lambda}{fh^2 M}}\right)}} = \dfrac{-2fhMdy}{\sqrt{2b}(h^2 - f^2)^{\frac{1}{2}}(1 - y^2)}$

$= -\dfrac{fhM}{\sqrt{2b}\sqrt{(h^2 - f^2)}} \times \dfrac{dy}{1 - y} -$

$\dfrac{fhM}{\sqrt{2b}\sqrt{(h^2 - f^2)}} \times \dfrac{dy}{1 + y}$. Questa equazione integrata somministra $t = \dfrac{fhM}{\sqrt{2b}\sqrt{(h^2 - f^2)}} \times$

$\log. \dfrac{1 - y}{1 + y} + \text{Cost.} = \dfrac{fhM}{\sqrt{2b}\sqrt{(h^2 - f^2)}} \times$

$\log. \dfrac{1 - \sqrt{\left(1 - e^{\frac{(h^2 - f^2)\lambda}{fh^2 M}}\right)}}{1 + \sqrt{\left(1 - e^{\frac{(h^2 - f^2)\lambda}{fh^2 M}}\right)}}$ senza aggiunta della

della costante, perchè in questa equazione diventa $t = 0$ quando $\lambda = 0$, siccome appunto esser dee. Il che era ec.

COROLLARIO.

148. Nel caso ordinario della velocità nulla in superficie, cioè di $\frac{fv}{h} = 0$, basta anche sostituire nella precedente formola il valore di $h = \infty$, ed essa si cangia in

$$\frac{fM}{\sqrt{2b}} \log. \frac{1 - \sqrt{\left(1 - e^{\frac{\lambda}{fM}}\right)}}{1 + \sqrt{\left(1 - e^{\frac{\lambda}{fM}}\right)}} = t.$$

PROBLEMA XX.

149. *Ritrovare la quantità d'acqua, che da qualunque vaso in un dato tempo si scarica.*

SOLUZIONE.

Chiamata λ la lunghezza del corpo d'acqua erogato dall'orifizio del vaso nel dato tempo t, sarà $f\lambda$ il corpo stesso, o la quantità d'acqua che si cerca. E poichè si è trovato $t =$

V 2 f

$$\frac{fhM}{\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}\log.\frac{1-\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}}{1+\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}},$$

si deduce $\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}=$

$$\log.\frac{1-\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}}{1+\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}},\ \text{e quindi}$$

$$e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}=\frac{1-\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}}{1+\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}};$$

e però $e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}\left(1+\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}\right)$

$=1-\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}$. Dunque

$$\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}=\frac{1-e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}}{1+e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}};$$

e

e quadrando $1 - e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}} =$

$$\frac{\left(1-e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}\right)^2}{\left(1+e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}\right)^2}$$, vale a dire $e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}} =$

$$\frac{\left(1+e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}\right)^2-\left(1-e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}\right)^2}{\left(1+e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}\right)^2}$$

$$= \frac{4e^{\frac{\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}}{\left(1+e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}\right)^2}$$. Laonde passando dai numeri ai logaritmi si otterà

$$\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M} = \frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM} + \log. 4 -$$

$$2\log.\left(1+e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}\right)$$, e per ultimo $\lambda =$

$$\frac{2fh^2M}{h^2-f^2}\left(\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{2fhM} - \log.\left(1+e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}\right)\right.$$

$+ \log. 2 \Big)$. Dunque il corpo d'acqua, che si cerca, cioè $f\lambda = \frac{2f^2h^2M}{h^2-f^2}\Big(\frac{t\sqrt{b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{2fhM}$

$$- \log.\Big(1 + e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}\Big) + \log. 2\Big).$$

Il che era ec.

COROLLARIO I.

150. Pel caso della velocità evanescente nella superior superficie faccio, come sopra, $h = \infty$, ed ottengo $f\lambda =$

$$2f^2M\Big(\frac{t\sqrt{2b}}{2fM} - \log.\Big(1 + e^{\frac{t\sqrt{2b}}{fM}}\Big) + \log. 2\Big).$$

COROLLARIO II.

151. Poichè l'integrale M è d'ordinario una quantità negativa, si fa chiaro, che qualora sia t non affatto picciolo, diviene

$e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}$ una grandezza picciolissima e da trascurarsi; e in conseguenza $f\lambda =$

$\frac{2f^2h^2M}{h^2-f^2}\Big(\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{2fhM} + \log. 2\Big) =$

fht

$\frac{fht\sqrt{2b}}{\sqrt{(h^2-f^2)}} + \frac{2f^2h^2M}{h^2-f^2}$ log. 2; e nel caso della velocità infinitesima in superficie nasce $f\lambda = ft\sqrt{2b} + 2f^2M$ log. 2.

COROLLARIO III.

152. Se l'acqua fino dal principio del moto si scagliasse dal lume colla massima celerità $v = h\sqrt{\frac{2b}{h^2-f^2}}$ uniformemente, allora essendo $\lambda = tv = th\sqrt{\frac{2b}{h^2-f^2}}$, nascerebbe $f\lambda = \frac{fht\sqrt{2b}}{\sqrt{(h^2-f^2)}}$, vale a dire si smaltirebbe in questa ipotesi tanto più d'acqua di prima quanto importa la quantità $\frac{2f^2h^2M}{h^2-f^2}$ log. 2

COROLLARIO IV.

153. Chiamata Q la quantità d'acqua erogata nel tempo t, e Q' l'erogata nel tempo comunque multiplo, o submultiplo mt, risulterà $Q = \frac{fht\sqrt{2b}}{\sqrt{(h^2-f^2)}} + \frac{2f^2h^2M}{h^2-f^2}$ log. 2, e $Q' = \frac{mfht\sqrt{2b}}{\sqrt{(h^2-f^2)}} + \frac{2f^2h^2M}{h^2-f^2}$ log. 2. Dunque

$$Q' = mQ + (1 - m)\ \frac{2f2h^2M}{h^2 - f^2}\ \log.\ 2\ ;$$

Nell' ordinaria ipotesi della velocità zero in superficie, pigliando come dianzi $h = \infty$, si ottiene $Q = ft\sqrt{2b} + 2f^2M \log.\ 2$; e $Q' = mft\sqrt{2b} + 2f^2M\ \log.\ 2$.

154. Per applicare a tutti i casi pratici particolari le generali formole finora ritrovate, basterà determinare a dovere l' integrale M dipendente dalla forma del vaso o del tubo, e sostituire questo valore nelle formole, siccome abbiam fatto negli addotti esempj. Pe' vasi, che sono mantenuti costantemente pieni, un tal integrale è sempre una grandezza costante, laddove in quelli, che si vanno successivamente vuotando, è variabile così l' integrale, come l' altezza dell' acqua; il che rende molto più complicato e difficile il calcolo. Ma nell' uno e nell' altro caso tutto resta appoggiato all' equazione fondamentale $p = A - b + x + \frac{n^2u^2}{2f^2} - \frac{n^2u^2}{2z^2} - \frac{n^2udu}{qdr}\int\frac{ds}{z}$, la quale in tanto avrà luogo, in quanto sarà vero, che tutte le particelle di ciascuno strato d' acqua perpendicolare alla linea centrale si muovono con uguali celerità in direzioni parallele alla posizione della linea centrale. L' attrito però delle particelle contigue alla pareti del tubo non può non ritardare alcun poco il loro mo-

movimento, e produrre in conseguenza un' alterazione e sbilancio, per cui non potrà mai rinvenirsi un rigoroso e perfetto accordo fra la teoria e l' esperienza.

Una circostanza poi essenziale, a cui dee porsi mente nell' uso delle predette formole, riguarda la quantità f, la quale dee prendersi non precisamente pel foro, ma piuttosto per la sezione della vena d' acqua contratta, di cui parleremo in appresso, talmente che volendosi pure che f significhi l' area del lume, si prenda in sua vece $\frac{f}{\sqrt{2}}$; giacchè nell' ipotesi di Newton l' area del lume sta alla sezione della vena contratta come $\sqrt{2} : 1$.

SE-

SEZIONE IV.

Del Moto dell' acqua ne' vasi e tubi assai larghi.

Fig. 36. 155. Allorchè il tubo *AOLB* (Fig. 36) ha una larghezza notabile, e l'acqua in esso contenuta si getta per l'apertura *OL* per la sola sua gravità; la superficie superiore *AB* durante il moto dell'acqua si mantiene orizzontale tanto se la perdita dell'acqua viene con altr'acqua risarcita, quanto se il tubo si va successivamente vuotando. In tal caso tutte le particelle di un medesimo *strato orizzontale* discendono con uguale celerità; e di qui è chiaro, che le precedenti formole non potranno più aver luogo in questo caso se non quando la linea centrale sia verticale. Si può però senza difficoltà anche in questa nuova ipotesi degli strati sempre orizzontali ritrovare un' equazione fondamentale con un artificio molto analogo al già praticato al §. 88, avendo solo riguardo, che laddove nelle precedenti ipotesi tutti gli strati d'acqua avevano la medesima situazione relativamente alla linea centrale, e conseguentemente cambiavano insieme colla linea centrale la situazione verso la linea orizzontale e verticale; qui per l'opposto essendo tutti gli strati orizzontali conservano la stessa posizione verso la

linea

linea orizzontale e verticale, e la cambiano solo per rispetto alla linea centrale. Che però è necessario d' introdurre nel calcolo l' angolo, che fa la linea centrale colla corrispondente sezione orizzontale, giacchè la velocità dell' acqua in ciascuna sezione orizzontale dipende da un tal angolo, siccome vedrassi nel seguente

PROBLEMA XXI.

156. *Nel tubo* AOLB *arriva l' acqua da principio colla suprema superficie orizzontale in* AB, *ed esce per l' inferiore apertura* OL. *Nel tempo* t *si avanza* AB *in* CD, *rimanendo sempre orizzontale durante il movimento: cercasi per l' istante presente la velocità, con cui l' acqua passa per una data sezione orizzontale* FG *del tubo*.

SOLUZIONE.

Sia *IEPQT* la linea, che passa pe' centri di gravità di tutti gli strati orizzontali d' acqua cioè la così detta *linea centrale*, e facciansi le sezioni orizzontali $AB = h$, $CD = q$, $FG = n$, $MN = z$, $LO = f$. Inoltre pe' centri *I*, *T* delle sezioni suprema ed infima si guidino la verticale *IK*, e l' orizzontale *KO*, e si ponga $IK = b$. Prolungata la sezione indeterminata *MN* sicchè incontri in *g* la linea verticale *IK* sia $Ig = x$, $IEQ = s$, $IE = r$, $Il = \omega$. Tirata da *Q* la tangente *QR* alla linea centrale si chiami φ l' angolo *NQR*; e parimente

mente condotte per P,E le tangenti PS, EH dicansi μ l'angolo GPS, ψ l'angolo DEH; e finalmente guidate le tangenti IV, $T\Pi$ alla linea stessa centrale ne' punti estremi I, T si faccia l'angolo $BIV = \beta$, e l'angolo $OT\Pi = \alpha$. Ora chiamisi u la velocità dell'acqua per la sezione data FG secondo la direzione della tangente PS; e risulterà la velocità secondo la direzione verticale $= u$ sen. μ. Perlocchè la velocità dell'acqua per la sezione indeterminata MN secondo la direzione verticale sarà $= \frac{nu \text{ fen. } \mu}{z}$, e secondo la direzione della tangente QR sarà $= \frac{nu \text{ fen. } \mu}{z \text{ fen. } \varphi}$. Fissato questo si rifletta, che l'elemento d'acqua $MmnN$ viene accelerato così dal proprio peso come dalla pressione prodotta dall'azion mutua delle particelle dell'acqua. Il suo peso è $= zdx$ (chiamata 1 la gravità terrestre acceleratrice); e se la pressione contro la superficie MN si fa uguale ad una colonna d'acqua avente MN per base, e p per altezza, una tal pressione si trova $= pz$; e col ragionamento già usato al §. 83, 79 si scopre la forza acceleratrice di detto elemento secondo la direzione verticale all'ingiù $= \frac{zdx - zdp}{zdx} = \frac{dx - dp}{dx}$. Quindi risolvendo questa forza acceleratrice in due altre, una in direzione della tangente QR, l'altra

tra

tra in direzione normale a QR, si trova la prima $= \frac{dx - dp}{dx}$ sen. $\varphi = \frac{dx - dp}{ds}$. Sarà dunque pel principio delle forze acceleratrici

$$\frac{dx - dp}{ds}\, ds = \frac{nu \text{ sen. } \mu}{z \text{ sen. } \varphi} \cdot \times \frac{nzdu \text{ sen. } \varphi \text{ sen. } \mu - nudz \text{ sen. } \varphi \text{ sen. } \mu - nuzd\varphi \cos. \varphi \text{ sen. } \mu}{z^2 \text{ sen. } \varphi^2}$$

$$= \frac{n^2udu \text{ sen. } \mu^2}{z^2 \text{ sen. } \varphi^2} - \frac{(n^2u^2dz \text{ sen. } \varphi \text{ sen. } \mu^2 + n^2u^2zd\varphi \cos. \varphi \text{ sen. } \mu^2)}{z^3 \text{ sen. } \varphi^3}.$$

Ma perchè nell' istante che MN s' innoltra in mn, CD si avanza in cd, ed è perciò l' elemento $CcdD = MmnN$, cioè qdr sen $\psi = zds$ sen. φ, ovvero z sen. $\varphi = \frac{qdr \text{ sen. } \psi}{ds}$; nascerà

$$dx - dp = \frac{n^2ududs \text{ sen. } \mu^2}{qdr \text{ sen. } \psi\, z \text{ sen. } \varphi} - \frac{(n^2u^2dz \text{ sen. } \varphi \text{ sen. } \mu^2 + n^2u^2zd\varphi \cos. \varphi \text{ sen. } \mu^2)}{z^3 \text{ sen. } \varphi^3};$$

vale a dire

$$dp = dx + \frac{n^2u^2 dz \text{ sen. } \varphi \text{ sen } \mu^2 + n^2u^2zd\varphi \cos. \varphi \text{ sen. } \mu^2}{z^3 \text{ sen } \varphi^3} - \frac{n^2u\, du\, ds \text{ sen. } \mu^2}{qdr \text{ sen. } \psi\, z \text{ sen. } \varphi}.$$

Si piglj l' integrale di questa equazione considerando come variabili le z, x, s, φ, e come costanti u, r, q ec., le quali essendo date per quell' istante, in cui cercasi la pres-

pressione p, non possono variare. Si otterrà dunque $p = x - \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2 z^2 \text{ sen. } \varphi^2} - \frac{n^2 u du \text{ sen. } \mu^2}{q dr \text{ sen. } \psi} \times \int \frac{ds}{z \text{ sen. } \varphi} +$ Cost. Preso pertanto l'integrale $\int \frac{ds}{z \text{ sen. } \varphi}$ in modo, che svanisca quando $s = \Delta = IQT$; siccome allora diventa $x = b$; $z = f$; $\varphi = \alpha$; $p = A =$ all'altezza d'una colonna d'acqua, il di cui peso uguaglj la pressione dell'atmosfera; quindi si ricava Cost. $= \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2 f^2 \text{ sen. } \alpha^2} - b + A$. Laonde $p = A - b + x + \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2 f^2 \text{ sen. } \alpha^2} - \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2 z^2 \text{ sen. } \varphi^2} - \frac{n^2 u du \text{ sen. } \mu^2}{q dr \text{ sen. } \psi} \int \frac{ds}{z \text{ sen. } \varphi}$. Poichè inoltre si è supposto, che nel tempo t la suprema sezione AB siasi abbassata in CD, e CD non soffre altra pressione che quella dell'atmosfera equivalente al peso di una colonna d'acqua di altezza P (sebbene potrà P rappresentare anche qualunque altra forza esterna combinata con quella dell'atmosfera); diventerà perciò $p = P$ allorchè sarà $x = \omega$, $s = r$, $z = q$, $\varphi = \psi$. Perlocchè nascerà $P = A - b + \omega + \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2 f^2 \text{ sen. } \alpha^2} - \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2 q^2 \text{ sen. } \psi^2} - \frac{n^2 u du \text{ sen. } \mu^2}{q dr \text{ sen. } \psi} \times$

$\int$

$\int \frac{ds}{z\,\text{sen.}\,\varphi}$. Quindi essendo ω, q, sen. ψ funzioni di r, mediante l' integrazione di questa formola si troverà un' equazione, la quale esprimerà il rapporto fra u, ed r, come si ricercava. Il che era ec.

COROLLARIO I.

157. Se l' orifizio LO è di alcuni piedi soltanto più basso della sezione CD, e non vi è altra forza esterna premente che quella dell' atmosfera, allora diventa $P = A$, e l' equazione si fa $\omega - b + \frac{n^2u^2\,\text{sen.}\,\mu^2}{2f^2\,\text{sen.}\,\alpha^2} - \frac{n^2u^2\text{sen.}\,\mu^2}{2q^2\text{sen.}\,\psi^2}$
$- \frac{n^2udu\,\text{sen.}\,\mu^2}{qdr\,\text{sen.}\,\psi}\int\frac{ds}{z\,\text{sen.}\,\varphi} = 0$.

COROLLARIO II.

158. Chiamata v la velocità dell' acqua nell' uscita dal lume LO in direzione della tangente $T\Pi$, e λ la lunghezza del prisma d' acqua già sortito nel tempo t, risulta $n^2u^2\,\text{sen.}\,\mu^2 = f^2v^2\text{sen.}\,\alpha^2$; e $fd\lambda\,\text{sen.}\,\alpha = qdr\,\text{sen.}\,\psi$. Altronde è noto, che sen. $\varphi = \frac{dx}{ds}$. Che però sostituiti questi valori nell' equazione precedente, essa si cangia in $\omega - b + \frac{1}{2}v^2$
$- \frac{f^2v^2\,\text{sen.}\,\alpha^2}{2q^2\,\text{sen.}\,\psi^2} - \frac{fvdv\,\text{sen.}\,\alpha}{d\lambda}\int\frac{ds^2}{zdx} = 0$.

PRO-

PROBLEMA XXII.

159. *Supposto, che lo stesso tubo del Problema antecedente sia mantenuto costantemente pieno; si cerca la velocità dell' acqua, sortita che ne sarà una certa quantità.*

SOLUZIONE.

Suppongasi, che sia uscita dall' apertura LO tant' acqua, quanta cape nello spazio $ACDB$, e che in questo tempo la superficie AB sia discesa fino in CD senza che però sia rimasto vuoto lo spazio $ACDB$, che si vuole costantemente pieno mediante il continuo afflusso di nuova acqua, che corre a riempirlo. Quindi è palese, che l' equazione $p = A - b + x + \frac{n^2u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2f^2 \text{ sen. } \alpha^2} - \frac{n^2u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2z^2 \text{sen. } \varphi^2} - \frac{n^2udu \text{ sen. } \mu^2}{q\, dr \text{ sen. } \psi} \int \frac{ds^2}{z dx}$ vale anche in quest' altro supposto, ponendo mente soltanto, che qui diviene $p = P$ quando $x = 0$, $s = 0$, $z = h$, $\varphi = \beta$, le quali ugualtà somministrano l' equazione $P = A - b + \frac{n^2u^2 \text{sen. } \mu^2}{2f^2 \text{sen. } \alpha^2} - \frac{n^2u^2 \text{sen. } \mu^2}{2h^2 \text{sen. } \beta^2} - \frac{n^2udu \text{ sen. } \mu^2}{q\, dr \text{ sen. } \psi} \int \frac{ds^2}{z dx}$. Di qui si otterrà mediante l' integrazione un' equazione fra u ed r. Il che era ec.

Co-

COROLLARIO I.

160. Si vede, che $\frac{nu \text{ sen. } \mu}{h \text{ sen. } \beta}$ è la velocità, con cui si abbasserebbe la suprema sezione AB, se cessasse istantaneamente l' afflusso dell' acqua, che accorre a riempiere il vuoto. Perlocchè, se vuolsi conservare inalterata la precedente equazione, è d' uopo supporre, che l' acqua vi accorra costantemente con quella stessa velocità. Che se al contrario l' acqua vi si porterà lateralmente con moto dolcissimo non avendo nel primo istante velocità alcuna in direzione della linea centrale, convien assumere $\frac{n^2u^2 \text{sen. } \mu^2}{2h^2 \text{sen. } \beta^2} = 0$; e l' equazione si cangia in $P = A - b + \frac{n^2u^2 \text{sen. } \mu^2}{2f^2 \text{sen. } \alpha^2} - \frac{n^2udu \text{ sen. } \mu^2}{q\,dr \text{ sen. } \psi} \int \frac{ds^2}{z\,dx}$.

COROLLARIO II.

161. Se si assume, come dianzi $P = A$, $g\,dr \text{ sen. } \psi = f d\lambda \text{ sen. } \alpha$, $n^2u^2 \text{sen. } \mu^2 = f^2v^2 \text{sen. } \alpha^2$, l' equazione di questo Problema diventa $b - \frac{1}{2}v^2 + \frac{f^2v^2 \text{sen. } \alpha^2}{2h^2 \text{sen. } \beta^2} + \frac{fvdv \text{ sen. } \alpha}{d\lambda} \int \frac{ds^2}{z\,dx} = 0$.

162. Qualora il vaso terminasse in un tubo orizzontale $EPQX$ (Fig. 37.), sicchè non potesse più quivi aver luogo l' orizzontalità degli strati d' acqua, che si mantiene nel vaso; allora è mestiere dirigere il calcolo nel modo

Fig. 37.

X se-

ſeguente: Sia $IHH'I'$ la linea centrale, la di cui porzione $I'H'O$ appartenente al tubo ſia retta ed orizzontale. Queſta toccherà in O l'altra porzione curva OHI della linea centrale. Per O ſi concepiſca un piano orizzontale OSV, il quale chiuda inferiormente il vaſo; e ſia IHZ la linea centrale di quel corpo d'acqua, che ſcorrerebbe pel vaſo $ABOV$, ſe nel fondo vi foſſe l'apertura LS, e ſi trovaſſe chiuſo XE. In queſto caſo ſuppongaſi, che l'acqua uſcendo ſi dirigeſſe per ZT; e ſia XE parallela a ZT. Se inoltre LS ſi fa $= XE$, e l'infiniteſima $Ss = Ee$, e parallela a ZT, ovvero EX, riſultano ſimili ed uguali gli elementi $SLls$, $XxeE$. Mentre ora XE ſi avanza in xe, CD ſi abbaſſa in cd; e queſto ſteſſo ſeguirebbe, ſe eſſendo chiuſo XE, ed aperto SL, ſi avanzaſſe SL in sl. Chiamata pertanto u la velocità dell'acqua nella data ſezione FG per quel momento che è ſortita la quantità d'acqua $ACDB$, e ritenute anche le altre denominazioni del §. 56 ſi ha sì nell'uno, che nell'altro caſo l'equazione differenziale $dp = dx - \frac{n^2 u\, du\, ds\, \text{sen.}\, \mu^2}{q\, dr\, \text{sen.}\, \psi\, z\, \text{sen.}\, \varphi} + \frac{n^2 u^2\, \text{sen.}\, \mu^2 (dz\, \text{sen.}\, \varphi + z\, d\varphi \cos.\, \varphi)}{z^3\, \text{sen.}\, \varphi^3}$. Fatta, in ambi i caſi, $= v$ la velocità dell'acqua uſcente per l'una o l'altra apertura, ſi ha $n^2 u^2\, \text{sen.}\, \mu^2 = f^2 v^2\, \text{sen.}\, \alpha^2$; e quindi

dp

$dp = dx - \frac{n^2 v\, dv\, ds\, \text{sen.}\, \alpha^2}{q\, dr\, \text{sen.}\, \psi\, z\, \text{sen.}\, \varphi} +$
$\frac{f^2 v^2\, \text{sen.}\, \alpha^2\, (dz\, \text{sen.}\, \varphi + z d\varphi\, \text{cos.}\, \varphi)}{z^3\, \text{sen.}\, \varphi^3}$; ed integrando $p = x - \frac{f^2 v^2 \text{sen.}\, \alpha^2}{2 z^2 \text{sen.}\, \varphi^2} -$
$\frac{n^2 v\, dv\, \text{sen.}\, \alpha^2}{q\, dr\, \text{sen.}\, \psi} \int \frac{ds}{z\, \text{sen.}\, \varphi}$ + Coſt. La Coſt, ſi determina con pigliare $s = \Delta = IHZ$ nell' uno e nell' altro caſo; $x = b$; $z = f$; $\varphi = \alpha$; $p = A$; dal che ſi trae Coſt. $= A - b + \frac{1}{2} v^2$; e perciò $p = A + x - b + \frac{1}{2} v^2 - \frac{f^2 v^2\, \text{sen.}\, \alpha^2}{2 z^2 \text{sen.}\, \varphi^2}$
$- \frac{n^2 v\, dv\, \text{sen.}\, \alpha^2}{q\, dr\, \text{sen.}\, \psi} \int \frac{ds}{z\, \text{sen.}\, \varphi}$, prendendo l' integrale $\int \frac{ds}{z\, \text{sen.}\, \varphi}$ in maniera, che ſi annulli allorchè $s = \Delta$.

Tutto ciò ha luogo nel ſuppoſto che manchi il tubo $XEPQ$, e l'acqua ſorta per l'apertura XE, o anche LS; ma può agevolmente applicarſi al caſo che l' acqua ſortendo per l' apertura XE imbocchi nel tubo $XEPQ$, e vada a gettarſi dall' orifizio PQ. Allora le ſezioni $M'N'$ del tubo in vece di eſſere orizzontali, come nel vaſo, ſono parallele ad EX, ed s rappreſenta quella porzione della linea centrale, che è compreſa fra AB ed MN, o fra AB ed $M'N'$, e che comincia sempre da I;

ed è facile accorgersi, che applicato a questo caso lo stesso discorso di prima si ricade nella medesima equazione differenziale, non essendovi altro divario che nella determinazione della Cost.; vale a dire s deve prendersi $= IZ + OH'$ quando z non rappresenta la sezione MN del vaso, ma bensì la $M'N'$ del tubo; e l' integrale $\int \frac{ds}{z \text{ sen. } \varphi}$ dee prendersi in modo, che si annulli quando $s = \Delta = IZ + OI' = c + a$, facendo $IZ = c$, $OI' = a$. E così p si porrà $= P$ allorchè sarà $s = r$ nel caso del vaso, che si va vuotando; e sarà $p = P$ quando $s = 0$ nel caso del vaso mantenuto costantemente pieno.

SE-

SEZIONE V.

Del moto dell' acqua ne' vasi e tubi di lunghezza indefinita, dai quali non sorte.

PROBLEMA XXIII.

163. *Restando tutto come sopra, si supponga solo il tubo* AOLB (Fig. 36.) *di indeterminata lunghezza, sicchè l' acqua non sorta ancora per* OL: *si cerca la velocità dell' acqua prima che esca per* OL, *e dopo che la suprema superficie* AB *sarà discesa in* CD.

Fig. 36.

SOLUZIONE.

Nel principio del moto sia la suprema superficie dell' acqua in AB, l' infima in ab, e nel tempo che AB si abbassa in CD si innoltri ab in fi, onde lo spazio $ACDB$ debba essere $=$ $abif$. Facciasi $if = \omega$, $qp = w$; e tirata la tangente pe della linea centrale in p, sia $fpe =$ γ, e l' ascissa Ik corrispondente alla sezione fi si ponga $= \theta$. Se ora nell' equazione fondamentale $p = x - \frac{n^2 u^2 \text{sen.} \mu^2}{2z^2 \text{sen.} \varphi^2} - \frac{n^2 u du}{q dr} \frac{\text{sen.} \mu^2}{\text{sen.} \psi} \times$ $\int \frac{ds}{z \text{ sen.} \varphi}$ + Cost. si prende talmente l' integrale

f

$\int \frac{ds}{\zeta \text{ sen. } \varphi}$, che si annulli allorchè $x = \theta$; diventa parimente $\zeta = \omega$, $\varphi = \gamma$, $p = A$, cioè $=$ all' altezza d' una colonna d' acqua equivalente alla pressione dell' atmosfera contro *fi*. Di qui si trae Cost. $= A - \theta + \frac{n^2 u^2 \text{ sen.} \mu^2}{2\omega^2 \text{ sen.} \gamma^2}$, e in conseguenza $p = A - \theta + x + \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2\omega^2 \text{ sen. } \gamma^2} - \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2\zeta^2 \text{ sen. } \varphi^2} - \frac{n^2 u\, du \text{ sen. } \mu^2}{q\, dr \text{ sen. } \psi} \int \frac{ds}{\zeta \text{ sen. } \varphi}$.

Se ora si suppone

I.° Il vaso costantemente pieno; si ha $p = P$, quando $x = o$, $\zeta = h$, $\phi = \beta$; il che somministra l' equazione $P = A - \theta + \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2\omega^2 \text{ sen. } \gamma^2} - \frac{n^2 u^2 \text{ sen } \mu^2}{2h^2 \text{ sen. } \beta^2} - \frac{n^2 u\, du \text{ sen. } \mu^2}{q\, dr \text{ sen. } \psi} \times \int \frac{ds}{\zeta \text{ sen. } \varphi} = A - \theta + n^2 u^2 \text{sen. } \mu^2 \left(\frac{1}{2\omega^2 \text{ sen. } \gamma^2} - \frac{1}{2h^2 \text{ sen. } \beta^2} \right) - \frac{n^2 u\, du \text{ sen. } \mu^2}{q\, dr \text{ sen. } \psi} \int \frac{ds}{\zeta \text{ sen. } \varphi}$. E perchè $q\, dr \text{ sen.} \psi = \omega\, d\omega \text{ sen.} \gamma$; $n^2 u^2 \text{sen.} \mu^2 = \omega^2 v^2 \text{sen.} \gamma^2$, denotando v la velocità dell' acqua nello strato infimo *fi*; perciò si ottiene $P - A + \theta = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\omega^2 v^2 \text{sen. } \gamma^2}{2h^2 \text{ sen. } \beta^2} - \frac{d.(\frac{1}{2}\omega^2 v^2 \text{sen. } \gamma^2)}{\omega\, d\omega \text{ sen. } \gamma} \int \frac{ds}{\zeta \text{ sen. } \varphi}$, ponendo qui mente, che nel prendere il differen-

renziale $d.\frac{1}{2}\omega^2 v^2$ ſen. γ^2 convien riguardare come variabili ω, e γ non meno di v, le quali dipendono egualmente dalla variabile w.

II.° Che ſe l' acqua che diſcende in CD non è ſupplita con altra acqua che accorra a riempiere il vuoto, allora poſta $Il = \delta$, diviene $p = P$ quando $x = \delta$, $z = q$, $\varphi = \psi$; e quindi ſi deduce l'equazione $P - A + \theta - \delta$

$$= n^2 u^2 \text{ ſen. } \mu^2 \left(\frac{1}{2\omega^2 \text{ ſen. } \gamma^2} - \frac{1}{2q^2 \text{ ſen. } \psi^2} \right)$$

$$- \frac{n^2 u du \text{ ſen. } \mu^2}{q dr \text{ ſen. } \psi} \int \frac{ds}{z \text{ ſen. } \varphi} = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\omega^2 v^2 \text{ ſen. } \gamma^2}{2q^2 \text{ ſen. } \psi^2}$$

$$\frac{d.(\frac{1}{2}\omega^2 v^2 \text{ ſen. } \gamma^2)}{\omega dw \text{ ſen. } \gamma} \int \frac{ds}{z \text{ ſen. } \varphi};$$ avendo ſempre riguardo di prendere l'integrale $\int \frac{ds}{z \text{ ſen. } \varphi}$ in maniera, che ſvaniſca quando $s = IQqp$. Il che era ec.

COROLLARIO I.

164. Se tutti gli ſtrati MN dell' acqua foſſero perpendicolari alla linea centrale, cioè gli angoli γ, ψ, φ di $90°$, ſi avrebbe

I.° Nel caſo del vaſo ſempre pieno, $P - A$

$$+ \theta = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\omega^2 v^2}{2h^2} - \frac{\omega v dv + v^2 dw}{dw} \int \frac{ds}{z}.$$

E parimente ſi otterrebbe

II.° Nel ſecondo caſo del vuotamento, $P - A$

$$+\theta-\delta=\tfrac{1}{2}v^2-\frac{\omega^2v^2}{2q^2}-\frac{(\omega v dv+v^2 d\omega)}{d\omega}\int\frac{ds}{z}.$$

COROLLARIO II.

165. Ogni qual volta quella parte del tubo, che da *ab* si estende fino ad *fi*, sarà cilindrica, e però $d\omega=0$; si avrà nel I.° caso, $P-A+\theta=\tfrac{1}{2}v^2-\frac{\omega^2v^2}{2h^2}-\frac{\omega v dv}{d\omega}\int\frac{ds}{z}$; e nel II.° caso, $P-A+\theta-\delta=\tfrac{1}{2}v^2-\frac{\omega^2v^2}{2q^2}-\frac{\omega v dv}{d\omega}\int\frac{ds}{z}$.

Qualora sopra *AB*, o *CD* non prema altra esterna forza eccetto quella dell' atmosfera, e sia inoltre la superior superficie solo di alcuni piedi più alta dell' inferiore, le precedenti equazioni si rendono più semplici a motivo di $P-A=0$; ciò che da noi si supporrà ne' seguenti Problemi.

PROBLEMA XXIV.

Fig. 34. 166. *Nel vaso prismatico retto* EDIQ (Fig.34.) *unito al tubo retto cilindrico* HISC *l' acqua per l' apertura* HI *si porta dal vaso nel tubo. Si supponga, che l' acqua giugnesse da principio in* eq *prima di muoversi, e che movendosi abbia corso il cammino* rF $=$ w. *Si domanda quale sarà la velocità* v *dell' anterior superficie* AB *nell' ipotesi, che*

che col supplemento di nuova acqua si mantenga la superior superficie sempre in EQ.

SOLUZIONE.

Si ricorra all'equazione $\theta = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\omega^2 v^2}{2h^2} - \frac{\omega v dv}{d\omega}\int\frac{ds}{z}$, dove θ rappresenta l'altezza QG della suprema superficie sopra il centro della AB, ω la sezione costante del tubo $HISC$, h la sezione costante del vaso; e facciasi l'angolo $GNF = \eta$, $Nr = \varepsilon$, $QN = c$; donde nasce $\theta = QN - NG = c - (\varepsilon + w)\cos.\ \eta$. Per determinare l'integrale $\int\frac{ds}{z}$, è mestiere ritrovarlo prima pel tubo $HISC$, supponendo $s > c$. Sarà dunque $\int\frac{ds}{z} = \int\frac{ds}{\omega} = \frac{s}{\omega} +$ Cost.; e poichè quest' integrale debb' essere $= 0$ quando $s = c + \varepsilon + w$, si ha Cost. $= \frac{-c-\varepsilon-w}{\omega}$; e quindi $\int\frac{ds}{\omega} = \frac{s-c-\varepsilon-w}{\omega}$. Laonde per ottenere quest' integrale per tutta la parte $HIBA$ del tubo basta fare $s = c$; il che dà $\frac{-\varepsilon-w}{\omega}$ pel valore del medesimo. Passando poi al vaso $EDIQ$, e supponendo $s < c$ l'integrale $\int\frac{ds}{z}$ diventa $= \frac{s}{h} +$ Cost. Si osservi

qui

qui, che quando $s = c$, si è già trovato $\int \frac{ds}{z} = \frac{-\varepsilon - w}{\omega}$; e perciò Cost. $= \frac{-\varepsilon - w}{\omega} - \frac{c}{h}$. Perlocchè si trova $\int \frac{ds}{z} = \frac{s-c}{h} \frac{-\varepsilon - w}{\omega}$, che posto $s = o$, come si richiede, diventa $-\frac{c}{h} \frac{-\varepsilon - w}{\omega}$. Pertanto sostituiti questi valori nella precedente equazione si ottiene $c - (\varepsilon + w)\cos.\eta = \frac{(h^2 - \omega^2)v^2}{2h^2} + \left(\frac{\varepsilon}{h} + \frac{\varepsilon + w}{\omega}\right)\frac{\omega v dv}{dw}$, ovvero $(h^2 - \omega^2) \times v^2 dw + (2ch\omega + 2h^2\varepsilon + 2h^2 w)v dv = 2\left(c - (\varepsilon + w)\cos.\eta\right)h^2 dw = \left(1 - \frac{\omega^2}{h^2}\right)v^2 dw + 2\left(\frac{c\omega}{h} + \varepsilon + w\right)v dv = 2\left(c - (\varepsilon + w)\cos.\eta\right)dw$. Facciasi $\frac{c\omega}{h} + \varepsilon + w = y$; e quindi $w = y - \varepsilon - \frac{c\omega}{h}$, $dw = dy$. Da ciò si deduce $\left(1 - \frac{\omega^2}{h^2}\right)v^2 dy + 2yvdv = 2c\,dy - 2y\,dy\cos.\eta + \frac{2c\omega dy\cos.\eta}{h}$.

Moltiplico questa equazione per $y^{-\frac{\omega^2}{h^2}}$, ed ho (1

$$\left(1-\frac{\omega^2}{h^2}\right)v^2y^{-\frac{\omega^2}{h^2}}dy+2y^{1-\frac{\omega^2}{h^2}}vdv =$$

$$2cy^{-\frac{\omega^2}{h^2}}dy - 2y^{1-\frac{\omega^2}{h^2}}dy\cos.\eta +$$

$$\frac{2c\omega y^{-\frac{\omega^2}{h^2}}dy\cos.\eta}{h}$$, la quale integrata somministra $v^2y^{1-\frac{\omega^2}{h^2}} = \frac{(2ch+2c\omega\cos.\eta)\,y^{1-\frac{\omega^2}{h^2}}}{h\left(1-\frac{\omega^2}{h^2}\right)}$

$$-\frac{2y^{2-\frac{\omega^2}{h^2}}\cos.\eta}{2-\frac{\omega^2}{h^2}}$$ + Coſt. Siccome poi $v=$ o, quando $w=$ o, ovvero $y=\varepsilon+\frac{c\omega}{h}$; ſi ricava Coſt. $=\frac{2\left(\varepsilon+\frac{c\omega}{h}\right)^{2-\frac{\omega^2}{h^2}}\cos.\eta}{2-\frac{\omega^2}{h^2}}$

$$-\frac{(2ch+2c\omega\cos.\eta)\left(\varepsilon+\frac{c\omega}{h}\right)^{1-\frac{\omega^2}{h^2}}}{h\left(1-\frac{\omega^2}{h^2}\right)}.$$

La

Laonde $\nu^2 = \frac{2ch + 2c\omega \cos.\eta}{h\left(1 - \frac{\omega^2}{h^2}\right)} \times$

$$\left\{ 1 - \left(\frac{\varepsilon + \frac{c\omega}{h}}{\varepsilon + \frac{c\omega}{h} + w} \right)^{1 - \frac{\omega^2}{h^2}} \right\}$$

$$+ \frac{2\left(\varepsilon + \frac{c\omega}{h}\right)\cos.\mu}{2 - \frac{\omega^2}{h^2}} \times$$

$$\left\{ \left(\frac{\varepsilon + \frac{c\omega}{h}}{\varepsilon + \frac{c\omega}{h} + w} \right)^{1 - \frac{\omega^2}{h^2}} - \left(\frac{\varepsilon + \frac{c\omega}{h} + w}{\varepsilon + \frac{c\omega}{h}} \right) \right\}.$$

Il che era ec.

COROLLARIO.

167. Se il tubo è orizzontale, cioè $\eta = 90°$, l'equazione si cangia in quest' altra molto più semplice $\nu^2 = \frac{2ch^2}{h^2 - \omega^2} \times$

$$\left\{ 1 - \left(\frac{\varepsilon + \frac{c\omega}{h}}{\varepsilon + \frac{c\omega}{h} + w} \right)^{1 - \frac{\omega^2}{h^2}} \right\} =$$

$2ch^2$

$$\frac{2ch^2}{h^2 - \omega^2} \left(1 - \left(\frac{\epsilon h + c\omega}{\epsilon h + c\omega + h\,w} \right)^{\frac{h^2 - \omega^2}{h^2}} \right).$$

PROBLEMA XXV.

168. *Restando tutto come nel Problema antecedente, si suppone solo, che non entri punto d' acqua in* EQ, *sicchè rimanga vuoto lo spazio* EKVQ: *si dimanda la velocità dell' inferior superficie* AB *dopo che da* eq *sarà pervenuta in* AB.

SOLUZIONE.

Nell' applicare l' equazione del §. 165 $\theta - \delta = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\omega^2 v^2}{2h^2} - \frac{\omega v dv}{dw} \int \frac{ds}{z}$ anche a questo caso, dee porsi mente, che l' integrale $\int \frac{ds}{z}$ $= \frac{s - c}{h} \; \frac{-\epsilon - w}{\omega}$ diventa $\frac{\delta - c}{h} \; \frac{-\epsilon - w}{\omega}$ facendo $s = \delta = MT$, come si dee in questo caso. Inoltre si ha $h\delta = \omega\, w$, cioè $\delta = \frac{\omega w}{h}$; e però $\int \frac{ds}{z} = \frac{\omega w}{h^2} - \frac{c}{h} \; \frac{-\epsilon - w}{\omega}$. Parimente $\theta - \delta = c - \frac{\omega w}{h} - (\epsilon + w) \cos. \eta$. Sostituiti adunque questi valori nella predetta equazione si trova $c - \frac{\omega w}{h} - (\epsilon + w) \cos. \eta$

$=$

$= \frac{1}{2}v^2 - \frac{\omega^2 v^2}{2h^2} + \frac{(\varepsilon + w)vdv}{dw} +$ $\frac{(ch\omega - \omega^2 w)vdv}{h^2 dw}$, vale a dire $\left(1 - \frac{\omega^2}{h^2}\right)v^2 dw$ $+ 2\left(\varepsilon + \frac{c\omega}{h} + \left(1 - \frac{\omega^2}{h^2}\right)w\right)vdv$ $= 2\left(c - \frac{\omega w}{h} - (\varepsilon + w)\cos.\eta\right)dw$.

L' integrale di questa equazione è visibilmente
$\left(1 - \frac{\omega^2}{h^2}\right)v^2 w + \left(\varepsilon + \frac{c\omega}{h}\right)v^2 =$
$2(c - \varepsilon\cos.\eta)w - \left(\frac{\omega}{h} + \cos.\eta\right)w^2$
$+$ Cost. E poichè si annullano insieme in questo caso w, e v, nasce Cost. $= 0$. Laonde
$v^2 = \frac{2(ch^2 - \varepsilon h^2 \cos.\eta)w - (h\omega + h^2\cos.\eta)w^2}{\varepsilon h^2 + ch\omega + (h^2 - \omega^2)w}$.
Il che era ec.

COROLLARIO.

169. Supposto il tubo orizzontale nasce l'equazione semplicissima $v^2 = \frac{2ch^2 w - h\omega w^2}{\varepsilon h^2 + ch\omega + (h^2 - \omega^2)w}$.

PROBLEMA XXVI.

Fig. 38. 170. *Il tubo retto cilindrico* AEFB (Fig. 38) *inclinato all' orizzonte sotto un angolo dato è unito al tubo* FENM *di qualunque forma, e questo si unisce pure all' altro tubo cilindrico retto* MNQP

MNQP. *L'acqua riempie da principio la porzione* AEGIHFB *di questo tubo composto; e supponendosi* AB *più alto di* HI, *mentre lo strato* AB *discende in* CD, *si alza* HI *in* PQ, *e scorre lo spazio* IQ $=$ w *con avere in* Q *una velocità* $=$ v: *si cerca un' equazione fra* w *e* v.

SOLUZIONE.

E' manifesto, che l'equazione $\theta - \delta = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\omega^2 v^2}{2h^2} - \frac{\omega v dv}{dw}\int\frac{ds}{z}$ si applica anche a questo Problema. Guidata la retta verticale AS, e le orizzontali MS, PL, ET, CO, nasce $AL = \theta$; $AO = \delta$; la larghezza di $AEFB$, cioè $CD = h$; la larghezza di $MNQP$, ovvero $HI = \omega$. Si faccia $AE = a$; $AC = r$; $NI = \alpha$; $TS = g$; l'angolo $ACI = \eta$; l'angolo $MPL = \mu$; e si avrà $\delta = r\,sen.\,\eta$; $\theta = AT + TS - SL = a\,sen.\,\eta + g - (\alpha + w)\,sen.\,\mu$. Dunque $\theta - \delta = g + (a - r)\,sen.\,\eta - (\alpha + w)\,sen.\,\mu$. Siccome inoltre si ha $hr = \omega w$, cioè $w = \frac{hr}{\omega}$; si deduce $\theta - \delta = g + (a - r) \times sen.\,\eta - \left(\alpha + \frac{hr}{\omega}\right) sen.\,\mu$. Laonde $g + (a - r)\,sen.\,\eta - \left(\alpha + \frac{hr}{\omega}\right) sen.\,\mu = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\omega^2 v^2}{2h^2} - \frac{\omega v dv}{dw}\int\frac{ds}{z}$. Trattasi ora

di

di determinare l' integrale $\int \frac{ds}{z}$; e questo pel tubo *MNQP* sarà $\frac{s}{\omega}$ + Cost. Se pertanto si piglia $BFM = \Delta$, si trova Cost. $= \frac{-\Delta - \alpha - w}{\omega}$, perchè dee sparire quell' integrale quando $s = BFMP$. Laonde $\int \frac{ds}{z} = \frac{s - \Delta - \alpha - w}{\omega}$; e per tutta la porzione *MNQP* del tubo risulta $\int \frac{ds}{z} = \frac{-\alpha - w}{\omega}$.
Passando ora a pigliare l' integrale $\int \frac{ds}{z}$ per la porzione *EFDC* dell' altro tubo cilindrico si trova $\int \frac{ds}{z} = \frac{s}{h}$ + Cost. Per definire questa Cost. si osservi, che l' integrale $\int \frac{ds}{z}$ preso per una parte indefinita del tubo irregolare di mezzo *EGNMF* si rende completo, e corrispondente all' intero tubo *EGNMF* allorchè nella sua indeterminata espressione si sostituisce a in luogo di s, come è evidente dal riflettere, che nel determinare la costante di questo integrale si dee mettere $= s = BFM = \Delta$. Chiamisi N questo integrale completo, (che sarà d' ordinario negativo) per tutto il tubo di mezzo *EGNMF* : che però pel primo tubo ci-

cilindrico $AEFB$ l' espressione $\int \frac{ds}{z} = \frac{s}{h}$ + Cost. sarà tale, che $\int \frac{ds}{z}$ diventerà N quando $s = a$. Sarà dunque Cost. $= N - \frac{a}{h}$; e quindi $\int \frac{ds}{z} = N + \frac{s-a}{h}$. Laonde l' integrale $\int \frac{ds}{z}$ preso per tutto il tubo composto risulta $= N \frac{-\alpha-w}{\omega} + \frac{s-a}{h}$. Ma è chiaro per la natura dell' equazione fondamentale doversi in questo caso mettere $s = r$ nell' integrale indefinito ora ritrovato; perciò nasce $\int \frac{ds}{z} = N + \frac{r-a}{h} - \frac{\alpha}{\omega} - \frac{hr}{\omega^2}$ (*a*). Da ciò si ricava l' equazione $g +$
Y $(a -$

(*a*) Per vieppiù rischiarare l' indole di siffatti integrali in tutti i casi consimili, è necessario riflettere, che dovendo l' integrale $\int \frac{ds}{z}$ svanire allorchè $s = BFMP$, che qui suppongo essere la linea centrale; se si denota con s' la porzione indefinita di AE computata di A, e con z' la sezione corrispondente; parimente con s'' la porzione indeterminata di FM computata da F, e con z'' la sezione ad essa relativa; finalmente con s''' la parte indeterminata di MP contando da M, e con z''' la sua corrispondente sezione, il detto integrale $\int \frac{ds}{z}$
verrà

$$(a-r)\,\text{sen.}\eta-\left(\alpha+\frac{hr}{\omega}\right)\text{sen.}\mu=\tfrac{1}{2}v^2-\frac{\omega^2v^2}{2h^2}$$

$$-\frac{\omega^2vdv}{hdr}\left(N+\frac{r-a}{h}-\frac{\alpha}{\omega}-\frac{hr}{\omega^2}\right)=\tfrac{1}{2}v^2$$

$$-\frac{\omega^2v^2}{2h^2}-\frac{N\omega^2v\,dv}{hdr}+\frac{(a-r)\omega^2vdv}{h^2dr}+\frac{\alpha\,\omega\,v\,dv}{h\,d\,r}$$

$+$

---

verrà a rappresentare la somma dei tre integrali $\int\frac{ds'}{z'}+\int\frac{ds''}{z''}+\int\frac{ds'''}{z'''}$ presi in tal modo, che nel primo si faccia $s'=BF$, $z'=EF$; nel secondo $s''=FM$, $z''=MN$; nel terzo $s'''=MP$, $z'''=PQ$, che è quanto dire doversi pigliare $\int\frac{ds'}{z'}$, per tutto il primo tubo BE, l' integrale $\int\frac{ds''}{z''}$ per tutto il secondo tubo EN, e l' integrale $\int\frac{ds'''}{z'''}$ per tutto MQ; e ciò fatto dovrà $\int\frac{ds}{z}$ annullarsi, il che si otterrà mediante la determinazione della costante. Ora $\int\frac{ds'}{z'}$ preso per tutto BE è $=\frac{a}{h}$; $\int\frac{ds''}{z''}$ preso per tutto EN chiamisi M, che sarà una grandezza costante; $\int\frac{ds'''}{z'''}$ pigliato per tutto MQ è $=\frac{\alpha+w}{\omega}=\frac{\alpha}{\omega}+\frac{hr}{\omega^2}$. Dunque fatto $\int\frac{ds}{z}=$ alla funzione variabile X,

si

$+ \frac{rvdv}{dr}$; e quindi $(h^2 - \omega^2) v^2 dr +$
$2(h^2 - \omega^2) rvdv - 2Nh\omega^2 vdv + 2a\omega^2 vdv +$
$2h\alpha\omega vdv = 2gh^2 dr + 2ah^2 dr \,\text{sen.}\, \eta - 2h^2 rdr \,\text{sen.}\, \eta$
$- 2h^2 \alpha dr \,\text{sen.}\, \eta - \frac{2h^3 rdr \,\text{sen}\, \mu}{\omega}$. Laonde integrando
si avrà $(h^2 - \omega^2) v^2 r - Nh\omega^2 v^2 + a\omega^2 v^2 +$

Y 2 h

---

si avrà $\int \frac{ds}{z} = X +$ Cost. Il perchè, siccome
$\int \frac{ds}{z}$ debb' essere $= o$, allorchè $s = BFMP$,
cioè quando $X = \frac{a}{h} + M + \frac{\alpha}{\omega} + \frac{hr}{\omega^2}$,
sarà in conseguenza $o = \frac{a}{h} + M + \frac{\alpha}{\omega} + \frac{hr}{\omega^2}$
$+$ Cost., vale a dire Cost. $= - \frac{a}{h} - M - \frac{\alpha}{\omega}$
$- \frac{hr}{\omega^2}$. Dunque $\int \frac{ds}{z} = X - \frac{a}{h} - M - \frac{\alpha}{\omega}$
$- \frac{hr}{\omega^2}$. In quest' integrale indefinito convien ora
assumere $s = r$, il che trasforma l' espressione indeterminata X in $\frac{r}{h}$, perchè in tal caso X rappresenta l' integrale $\int \frac{ds}{z}$ preso per la porzione AD del primo tubo. Perlocchè nasce finalmente
$\int \frac{ds}{z} = \frac{r-a}{h} - \frac{\alpha}{\omega} - \frac{hr}{\omega^2} - M$, dove è
$- M = N$ trovato dianzi.

$h\alpha\omega v^2 = 2gh^2r + 2ah^2r$ sen. $\eta - h^2r^2$sen. η $- 2h^2\alpha r$ sen. $\mu - \frac{h^3r^2 \text{ sen. } \mu}{\omega}$; e per fine $v^2 =$

$$\frac{h^2r\left(2g+(2a-r)\text{sen.}\eta-\left(2a+\frac{hr}{\omega}\right)\text{sen.}\mu\right)}{(h^2-\omega^2)r+a\omega^2+ha\omega-Nh\omega^2}.$$

Il che era ec.

COROLLARIO I.

171. Chiamata u la velocità dell' acqua nel primo tubo cilindrico $AEFB$, si fa essere

$$u^2 = \frac{\omega^2 v^2}{h^2} =$$

$$\frac{\omega^2 r\left(2g+(2a-r)\text{ sen. }\eta-\left(2\alpha+\frac{hr}{\omega}\right)\text{ sen. }\mu\right)}{(h^2-\omega^2)r+a\omega^2+h\alpha\omega-Nh\omega^2} =$$

$$\frac{r\left(2g+(2a-r)\text{ sen }\eta-\left(2\alpha+\frac{hr}{\omega}\right)\text{ sen. }\mu\right)}{\left(\frac{h^2}{\omega^2}-1\right)r+a+\frac{h\alpha}{\omega}-hN} =$$

$$\frac{2\left(g+a\text{ sen. }\eta-\alpha\text{ sen }\mu\right)hr-\left(\text{sen.}\eta+\frac{h}{\omega}\text{ sen.}\mu\right)hr^2}{\left(\frac{h^2}{\omega^2}-1\right)hr+ha+\frac{h^2\alpha}{\omega}-h^2N}.$$

Perlocchè fatto $(g + a$ sen. $\eta - \alpha$ sen. $\mu)h = E$; (sen. $\eta + \frac{h}{\omega}$ sen. $\mu)h = F$; $\frac{\alpha h^2}{\omega} + ha$

$-$.

$-h^2 N = A$; $\left(\frac{h^2}{\omega^2} - 1\right) h = B$, risulterà $u^2 = \frac{2Er - Fr^2}{A + Br}$.

COROLLARIO II.

172. Per ritrovare la strada che correranno le due superficie AB, HI ne' rispettivi tubi, si fa $u = o$; il che dà $r = \frac{2E}{F} = \frac{2(g + a \text{ sen.}\, \eta - \alpha \text{ sen.}\, \mu)\, \omega}{\omega \text{ sen.}\, \eta + h \text{ sen.}\, \mu}$, e parimente $w = \frac{hr}{\omega} = \frac{2(g + a \text{ sen.}\, \eta - \alpha \text{ sen.}\, \mu)\, h}{\omega \text{ sen.}\, \eta + h \text{ sen}\, \mu}$.. Ciò dà a divedere, che i viaggi BD, IQ fatti dall' acqua ne' due tubi $AEFB$, $MNQP$ non discendono punto dal tubo di mezzo $ENMF$, qualunque sia la sua forma e grandezza.

COROLLARIO III.

173. Perchè u nel principio del moto è $= o$; è manifesto dover crescere u ad un valore massimo. Per ritrovarlo pongo $udu = \frac{(Edr - Frdr)(A + Br) - Bdr(Er - \frac{1}{2}Fr^2)}{(A + Br)^2}$ $= o = AE + BEr - AFr - BFr^2 - BEr + \frac{1}{2}BFr^2 = o$, cioè $r^2 + \frac{2A}{B} r - \frac{2AE}{BF}$

 =

$= o$. Dunque $r = -\frac{A}{B} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{B^2} + \frac{2AF}{BF}\right)}$ $= \pm \sqrt{\frac{(A^2 F + 2ABE) - A\sqrt{F}}{B\sqrt{F}}}$. La ragione poi di questi due differenti valori di r si è, perchè la superficie AB si moverebbe all' indietro qualora HI fosse più alta di lei; e per conseguenza due sono i casi possibili del massimo valore di u.

COROLLARIO IV.

174. Se i due tubi sono di ugual larghezza, ovvero $h = \omega$, allora diventando $B = o$, resta indeterminato il valore di r. In tal caso è d' uopo ricorrere all' equazione $\frac{1}{2}BFr^2 + AFr - AE = o$, la quale dà $AFr - AE = o$, ovvero $r = \frac{E}{F} = \frac{g + a \text{ sen. } \eta - a \text{ sen. } \mu}{\text{sen. } \eta + \text{sen. } \mu}$; e di qui nasce il

COROLLARIO V.

175. Nel caso de' due tubi cilindrici di ugual larghezza, la velocità dell' acqua diventa massima in entrambi quando si trova aver corso la metà del cammino che può trascorrere (Cor. II.).

COROLLARIO VI.

176. Supposti i due tubi di ugual larghezza

ghezza la velocità dell' acqua diviene maſſima quando ſi trova alla medeſima altezza in entrambi; imper[illegible] $r = \frac{g + a\,\text{sen.}\,\eta - \alpha\,\text{sen.}\,\mu}{\text{sen.}\,\eta + \text{sen.}\,\mu}$ dà $g + (a - r)\,\text{sen.}\,\eta = (r + \alpha)\,\text{sen.}\,\mu = (w + \alpha)\,\text{sen.}\,\mu$, vale a dire l' altezza della ſuperficie CD $=$ all' altezza di PQ ſopra la ſteſſa orizzontale MS. Dunque allorchè PQ è ſalito alla maſſima altezza, ed AB diſceſo alla maſſima profondità, ſi trova PQ tanto elevato ſopra AB quanto AB era da principio elevato ſopra PQ.

COROLLARIO VII.

177. Ogni qual volta i due tubi cilindrici ſieno di differente larghezza, la maſſima velocità dell'acqua non ſi ha più alla metà del viaggio: ma ſi verifica però, che quando l'acqua ſi trova in entrambi a mezzo il cammino, ſi ſcuopre in ambedue ugualmente elevata ſopra la ſteſſa retta orizzontale. Impercioсchè l' elevazione dell' acqua ſopra la retta SM, giunta che ſia al mezzo di AC, è $= (a - \frac{1}{2}r)\,\text{ſen.}\,\eta + g = \left(a - \frac{E}{F}\right)\text{ſen.}\,\eta + g = g + a\,\text{ſen.}\,\eta - \frac{(g\omega\,\text{ſen.}\,\eta + a\omega\,\text{ſen.}\,\eta^2 - \alpha\omega\,\text{ſen.}\,\mu\,\text{ſen.}\,\eta)}{\omega\,\text{ſen.}\,\eta + h\,\text{ſen.}\,\mu} = \frac{gh\,\text{ſen.}\,\mu + ah\,\text{ſen}\,\mu\,\text{ſen.}\,\eta + \alpha\omega\,\text{ſen.}\,\mu\,\text{ſen.}\,\eta}{\omega\,\text{ſen.}\,\eta + h\,\text{ſen.}\,\mu}$.

 Pa-

Parimente l'altezza dell' acqua ſopra la ſteſſa orizzontale SM, ſalita che ſia al mezzo di IQ, è $= (\alpha + \frac{1}{2} w)$ ſen. $\mu = \left(\alpha + \frac{\frac{1}{2}hr}{\omega}\right)$ ſen. μ $= \left(\alpha + \frac{hE}{\omega F}\right)$ ſen. μ $=$ α ſen. μ $+$ $\frac{gh \text{ ſen. } \mu + ah \text{ ſen. } \eta \text{ ſen. } \mu - \alpha h \text{ ſen. } \mu^2}{\omega \text{ ſen. } \eta + h \text{ ſen. } \mu}$ $=$ $\frac{\alpha\omega \text{ ſen. } \eta \text{ ſen. } \mu + gh \text{ ſen. } \mu + ah \text{ ſen. } \eta \text{ ſen. } \mu}{\omega \text{ ſen. } \eta + h \text{ ſen. } \mu}$, che è il valore dell' altezza precedente.

COROLLARIO VIII.

178. Quindi ſi ſcorge, che tolto ogni oſtacolo, che ſuole ritardare a poco a poco il movimento dell' acqua, queſta ne' tubi comunicanti proſeguirà coſtantemente ad oſcillare a foggia d' un pendolo. Ed è facile dimoſtrare, che arrivata PQ alla maſſima altezza nell' altro tubo, queſto dee tornar indietro di tanto, di quanto ſi era avanzata dalla ſua prima ſtazione. Imperciocchè ſuppoſto, che $NQ = \alpha + \frac{2hE}{(\omega \text{ ſen. } \eta + h \text{ ſen. } \mu)\omega}$ ſia ora ciò che prima era a, ed $a - \frac{2E}{\omega \text{ ſen. } \eta + h \text{ ſen. } \mu}$ ſia quello che dianzi era α; e così pure permutato il ſignificato delle lettere η, μ, ω, h, g, e zero; e ſcrivendo

vendo E' in vece del precedente E, si troverà
$$E' = \omega\alpha \text{ sen. } \mu + \frac{2hE \text{ sen. } \eta}{h \text{ sen. } \mu + \omega \text{ sen. } \eta} - ha \text{ sen. } \eta$$
$$+ \frac{2\omega E \text{ sen. } \eta}{h \text{ sen. } \mu + \omega \text{ sen. } \eta}.$$

PROBLEMA XXVII.

179. *Supposti di larghezza uguale i detti due tubi cilindrici, ritrovare il tempo, in cui la superficie* AB *scorre un dato spazio.*

SOLUZIONE.

Poichè $dt = \frac{dr}{u}$, ed $u = \frac{\sqrt{(2Er - Fr^2)}}{\sqrt{(A + Br)}}$,
che in questo caso di $h = \omega$, cioè di $B = 0$, diventa $= \frac{\sqrt{(2Er - Fr^2)}}{\sqrt{A}}$; si ha perciò $dt =$
$$\frac{dr\sqrt{a}}{\sqrt{(2Er - Fr^2)}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{F}} \cdot \frac{Fdr : E}{\sqrt{\left(\frac{2Fr}{E} - \frac{F^2 r^2}{E^2}\right)}}.$$
L' integrazione di questa equazione dà $t = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{F}}$. Arc. sen. ver. $\frac{rF}{E}$ senza alcuna costante, perchè svaniscono insieme r, e t. Il che era ec.

COROLLARIO I.

180. Per ritrovare il tempo d' un' intera oscil-

oſcillazione baſta nella formola $t = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{F}}$. Arc fen. ver. $\frac{Fr}{E}$ ſoſtituire $\frac{2E}{F}$ in luogo di r, e naſce $t = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{F}}$. Arc. ſen. ver. $2 = \frac{\pi\sqrt{A}}{\sqrt{F}}$, ſupponendo π la ſemicirconferenza del cerchio deſcritto col rnggio $= 1$. Laonde $t = \frac{\pi\sqrt{(\alpha h + ah - h^2 N)}}{\sqrt{(h \text{ sen. } \eta + h \text{ sen. } \mu}}$.

COROLLARIO II.

181. Non entrando $\frac{E}{h}$, cioè l' altezza iniziale della ſuperficie *AB* ſopra *HI*, nell' eſpreſſione del tempo dell' oſcillazione, è manifeſto dover eſſo *caeteris paribus* rimanere lo ſteſſo comunque ſia più o meno elevata da principio la *AB* ſopra *HI*.

PROBLEMA XXVIII.

182. *Ritrovare la lunghezza d' un pendolo ſemplice, le di cui minime oſcillazioni ſieno iſocrone con quelle dell' acqua ne' predetti tubi comunicanti.*

SOLUZIONE.

È noto dalla Meccanica, che il tempo dell'

dell' oscillazione d'un pendolo semplice, che ha la lunghezza l, è $= \pi \sqrt{l}$. Ma si è trovato pel tempo dell' oscillazione dell' acqua $t = \frac{\pi \sqrt{A}}{\sqrt{F}}$. Dunque si avrà $l = \frac{A}{F} = \frac{\alpha h + ah - h^2 N}{h \text{ sen.} \eta + h \text{ sen.} \mu}$. Il che era ec.

COROLLARIO.

183. Da ciò si scorge, che il tempo dell' oscillazione dell' acqua e la lunghezza del pendolo isocrono dipendono dalla forma del tubo di comunicazione *FEGNM*, per modo che in parità di tutto il restante tanto più tardo saranno le oscillazioni, quanto maggiore sarà N, ossia $\int \frac{ds}{z}$. Che però supposto cilindrico anche un tal tubo, e di larghezza parimente uguale agli altri due, trovasi $N = -\frac{\lambda}{h}$, qualora λ esprima la sua lunghezza. Laonde risulta in tal caso la lunghezza del pendolo $= \frac{\alpha + a + \lambda}{\text{sen.} \eta + \text{sen.} \mu}$; e siccome $\alpha + a + \lambda$ è tutta la lunghezza della parte riempiuta d'acqua, se si fa $\alpha + a + \lambda = L$, si ha la lunghezza del pendolo isocrono $= \frac{L}{\text{sen.} \eta + \text{sen.} \mu}$. Quindi supposte verticali le due gambe del tubo comunicante, la lunghezza del pendolo è la metà di quella dell'acqua.

PRO-

PROBLEMA XXIX.

184. *Supposte d'inegual larghezza le due gambe cilindriche del sifone composto, ma picciolissime le oscillazioni dell'acqua; ritrovare il tempo di una oscillazione.*

SOLUZIONE.

Si è trovato in generale $u^2 = \frac{2Er - Fr^2}{A + Br}$

Ma $A + Br = \frac{\alpha h^2}{\omega} + ha - h^2N + \left(\frac{h^2}{\omega^2} - 1\right)hr$; cioè per ipotesi essendo α, a, r picciolissime, $A + Br = - h^2N$. Dunque $u^2 = \frac{2Er - Fr^2}{- h^2N}$. Perciò $dt = \frac{dr}{u} = \frac{h\,dr\sqrt{-N}}{\sqrt{(2Er - Fr^2)}}$. Questa equazione integrata come sopra somministra $t = \frac{\pi h\sqrt{-N}}{\sqrt{F}}$ pel tempo dell' intera oscillazione. Il che era ec.

COROLLARIO.

185. La lunghezza del pendolo isocrono in questo caso sarà $- \frac{h^2N}{F}$, cioè $- \frac{\omega hN}{\omega\ \text{sen.}\ \eta + h\ \text{sen.}\ \mu}$.

186. Prima di terminar questo capo è necess-

ceſſario indicare una difficoltà, che s' incontra nell' applicazione dell' equazione generale allorchè le ſezioni dell' acqua ſono orizzontali, e il tubo ha la forma rappreſentata nella Fig. 36, Fig. 36. difficoltà non diſſimulata dal Sig. D' ALEMBERT nel suo *Trattato de' Fluidi* al §. 127. Tutte le ſezioni orizzontali dell' acqua contenute nel braccio $A\beta\omega B$ del tubo diſcendono per ſuppoſto con moto parallelo, e con moto parallelo aſcendono tutte le ſezioni orizzontali dell' altro braccio $L\omega\lambda O$. Ma come ſi moverà l' acqua contenuta ſotto il piano orizzontale $\beta\omega\lambda$? Il Sig. D'ALEMBERT è d' avviso poterſi concepire, che la sezione $\beta\omega$ con una specie di moto rotatorio intorno al punto ω pervenga nella ſituazione $\omega\lambda$. Poſto, che la coſa foſſe effettivamente così, queſta sorta di moto non sarebbe compresa nelle noſtre equazioni. La ſituazione delle sezioni MN per queſta parte inferiore del tubo sarebbe allora variabile così per riguardo alla linea centrale, come per riguardo all' orizzonte; e quand' anche ſi voleſſe introdurre nel calcolo queſt' ultima ſituazione variabile, sarebbe sempre ignota la legge d' un tal cambiamento.

Se poi queſta parte inferiore del canale sotto il piano orizzontale $\beta\omega\lambda$ foſſe poco conſiderabile in paragone del reſto, potrà lasciarſi da parte, o senza tenerne conto pigliare l' integrale $\int \frac{ds}{z \,\text{sen.}\, \varphi}$ da AB ſino a $\beta\omega$, e poſcia

da

da $\omega\lambda$ fino ad *fi*. Che se le due gambe del sifone comunicassero insieme per mezzo d'un tubo orizzontale di considerabil lunghezza, bisognerebbe allora cercare l'integrale $\int \frac{ds}{z \text{ sen. } \varphi}$ anche per questo tubo, ed aggiugnerlo alle altre due parti di detto integrale, riguardando le sezioni del tubo di comunicazione (sia orizzontale, sia obliquo) come perpendicolari alla linea centrale, colla qual ipotesi si può venire a capo di pressocchè tutti i casi della pratica.

SE-

SEZIONE VI.

Del moto dell' acqua prodotto dalla pressione dell' aria.

187. Se un tubo ricurvo *ACB* (Fig. 39) si fa passare attraverso le pareti di un vaso *DEF* sicchè un braccio del tubo resti dentro il vaso, e l'altro braccio penda all'infuori, versando in tale stato dell'acqua nel vaso *DEF*, entra questa per *A* nel braccio *AC*, e giugne alla medesima altezza con quella del vaso. Pel punto più elevato del tubo condotto il piano orizzontale *HL* e la sezione *CI*, l'acqua non uscirà punto dal vaso fintanto che la suprema sua superficie sarà più bassa di *HL*. Ma se questa si solleva sopra *HL*, cioè fino a *DF*, scorre tantosto l'acqua per la sezione *CI*, e discende pel braccio *CB*; e ciò sempre succede comunque esser possa più lungo o più corto, più largo o più stretto il braccio *CB* dell'altro *CA*. Si immagini inoltre un altro vaso *MON*, ed attraverso alle pareti di questo si faccia parimente passare il secondo braccio *CB* del tubo. Si infonda in ambedue i vasi tant' acqua, che arrivi nell' uno e nell' altro alla medesima altezza sopra i due orifizj *A*, *B*, sicchè riesca *AG* = *BK*, se l'acqua giugne nei vasi a *DF*, ed *MN*. Se per-

Fig. 39.

pertanto il tubo ACB fosse pieno d'acqua, e l'orifizio B chiuso con un coperchio, soffrirebbe questo una doppia pressione. L'acqua MON lo premerebbe all'insù; l'acqua DEF all'ingiù. Prodotta la superficie orizzontale DF in mn incontrata in Q dalla BK; e chiamata bb la superficie del coperchio in B, soffre questo dall'acqua contenuta in DEF una pressione all'ingiù $= gbb.BQ$ (esprimendo g la specifica gravità dell'acqua); e dall'acqua contenuta in MON prova una spinta all'insù $= gbb.BK$. Quindi qualora A, e B stiano nello stesso piano orizzontale, e sia perciò $AG = BQ = BK$; le due pressioni risultano uguali, e quand' anche nessun coperchio si trovasse in B, tutto resterebbe in equilibrio. Ma se B sta più basso di A, cioè al di sotto del piano orizzontale che passa per A; allora le particelle dell'acqua che si trovano nella sezione B dell'orifizio, e che presentemente ponno sostituirsi al coperchio, sono premute più fortemente all'ingiù che all'insù, e la pressione risultante le spinge al basso con una forza $= gbb(BQ - BK)$. Che però tirato per A il piano orizzontale, che incontra in R la BQ, diventa $QR = AG = BK$; e in conseguenza $BQ - BK = BQ - QR = BR$; e quindi la spinta al basso $= gbb.BR$. Dunque l'acqua passerà dal vaso DEF pel tubo ACB nell'altro vaso MON fino a tanto che non diventa $BK = BQ$,

BQ, vale a dire fino a che le superficie dell' acqua in ambedue i vasi non si trovano nello stesso piano orizzontale. Il tubo *ACB* si concepisca ora pieno d'acqua, e all'aria aperta nella situazione di prima: ciò vale ugualmente che immaginare le due braccia *AC*, *BC* immerse nei vasi *DEF*, *MON*, e questi pieni d'acqua all'altezza di 32 piedi sopra *A*, e *B*. Perlocchè se *B* è più basso di *A*, sortirà l'acqua per l'apertura *B*: e se il braccio più corto *AC* del tubo è immerso in un vaso d'acqua *DEF*, e il più lungo pende al di fuori all' aria libera, entrerà continuamente per *A* nuova acqua nel tubo, e sortirà per *B* fin tanto che *A* resta sott' acqua. Imperciocchè preme sopra *DF* l'atmosfera quanto premerebbe una colonna d'acqua elevata 32 piedi sopra *DF*. Con ugual forza preme l'atmosfera anche contro *B* verso all' insù; giacchè il divario, che può esservi fra l'una e l'altra pressione per l'altezza BQ della colonna d'aria, è troppo picciola cosa per farne caso. E'adunque la pressione in *B* verso all' insù $= gbb \times 32$. pied. e verso all' ingiù $= gbb(32.$ pied. $+ BQ)$; e perciò la spinta risultante verso il basso è $= gbb . BQ$.

Si è dato il nome di *Sifoni* a siffatti tubi ricurvi.

Da quanto si è detto si scopre, che si può col mezzo del sifone, una volta che sia riempito, far salir l'acqua oltre il proprio li-

Fig. 40. livello; purchè l'altezza *GL* (Fig. 40) sopra il livello dell' acqua non ecceda 32. pied.. Così pure potrà uvotarsi col mezzo del sifone il vaso *DEF* fino in *A*, purchè l' altezza *AL* non superi i 32. pied.. Dovrà però sempre *B* essere più basso di *A* se il vaso ha da uvotarsi fino in *A*; poichè essendo più alto il vuotamento non arriverà che al livello di *B*, e il sifone non seguiterà a versare se non fino a tanto che l'orifizio *B* sarà più basso della superficie dell' acqua nel vaso. Trovandosi *B* nello stesso piano orizzontale con *A*, seguita il flusso per tutto il tempo che *A* sta sott' acqua; ma più lento via via rendesi il moto quanto più si abbassa *DF* verso *A*, e cessa totalmente quando *DF* passa per *A*; giacchè nulla è allora la pressione, che spinge l' acqua dentro l' apertura *A*, la qual pressione non sarebbe però ancor nulla se *B* fosse più basso di *A*. E qui appunto convien distinguere due casi differenti. Quando *A*, e *B* stano nel medesimo piano orizzontale *AH*, e la superficie *DF* dell'acqua è discesa in *AH*, cessa il flusso del sifone, ma senza che il sifone si uvoti; il quale restando anzi pieno d' acqua ricomincia subito a versare se si getta nuova acqua nel vaso. Ma se all' opposto *B* si trova al di sotto di *A*; discesa che sia *DF* in *AH*, entra coll' ultim' acqua anche l' aria nel sifone il quale si vuota; e infondendo nuov' acqua nel vaso, non ricomincia per questo il si-

fone

fone a gettare prima di riempirfi d'acqua di bel nuovo: ed in queſto caſo, trattandoſi di piccioli ſifoni, ſi riempiono d' acqua ſucchiandoli. L'uſo è come segue: ſi immerge nel vaſo d'acqua *DEF* un braccio del ſifone, nel quale entra l' acqua fino all'altezza di quella del vaſo. Quindi ſi ſucchia in *B* colla bocca l'aria dal rimanente del ſifone; ed allora la preſſione dell' atmosfera ſopra la ſuperficie dell' acqua *DF* ſpinge queſta più in alto dentro il ſifone, la quale ſorte per *B* fintanto che *B* reſta più baſſo di *DF*. Per l' uſo, a cui comunemente ſi fa ſervire il ſifone, è bene di dare maggior lunghezza al braccio eſterno *BC* che all' immerſo *AC*, onde B venga a riuſcire più baſſo di *A*; e l' acqua in conſeguenza ſcorra più rapidamente che non ſarebbe ſe *A* e *B* foſſero alti egualmente. Può per altro eſſere alcuna volta utile e comodo anche il ſifone equilatero, il quale avendo il vantaggio di non vuotarſi quando ceſſa di buttare, ci libera dall' incomodo di ſucchiarlo e riempirlo per ottenere il fluſſo allorchè ſi verſa nuov' acqua nel vaſo *DEF*.

Di qui appariſce l' inganno di coloro, che credono dover eſſer più corto il braccio immerſo del ſifone, che il braccio eſteriore per ottenere l' efluſſo dell' acqua; quando a tal effetto baſta ſoltanto, che l' orifizio del braccio eſterno ſia più baſſo della ſuperficie dell' acqua nel vaſo.

PROBLEMA XXX.

Fig. 40. 188. *Data la forma del vaso* NEC (Fig. 40), *e del sifone* ACB, *unitamente all' altezza primitiva* AL *dell' acqua sopra l' apertura* A *del sifone, e alla profondità* BH *dell' apertura* B *sotto* A: *si dimanda la velocità dell' acqua nell' uscire da* B *dopo che si è abbassata nel vaso per una data altezza* LG.

SOLUZIONE.

Considerando la parte *NIKC* del vaso come un tubo unito al sifone in *A*, si vede tosto, che l' equazione del Problema V. §. 90. vale anche per questo caso. Ripigliata una tal equazione, la qual è $\frac{Mf^2vdv}{n^2} + \frac{(b-\omega)qdr}{n^2} + \frac{f^2v^2dr}{2qn^2} - \frac{v^2qdr}{2n^2} = 0 = Mf^2vdv + (b-\omega)qdr + \frac{f^2v^2dr}{2q} - \frac{1}{2}v^2qdr = 0$, è manifesto, che presentemente è $b = B$; $\omega = LG$; $q = DF$; $r =$ alla porzione della linea centrale che dalla sezione suprema *LC* del vaso giugne alla superficie dell' acqua *DF*. L' integrale $M = \int \frac{ds}{z}$ dee prendersi in modo che svanisca quando $s = a + \lambda$, nominando *a* la porzione della linea centrale che dalla superficie *LC* del vaso arriva fino alla se-

zio-

zione che passa per A, e λ la linea centrale ACB di tutto il sifone; ed indi nell' integrale così ritrovato convien sostituire $\lambda + a - r$ in luogo di s, a norma di ciò che nel Problema V. viene prescritto. Laonde l' equazione differenziale $Mf^2vdv + (b - \omega)qdr + \frac{f^2v^2dr}{2q} - \frac{1}{2}v^2qdr = 0$, dove q, ed ω per la natura della linea centrale debbono essere funzioni di r, mercè l' integrazioni farà conoscere la relazione fra v, ed r. Il che era ec.

COROLLARIO I.

189. Supposte molto grandi le sezioni del vaso fra DF, e KI in paragone dell' orifizio B, la detta equazione diventa presso a poco $(b - \omega)qdr - \frac{1}{2}v^2qdr = 0$, vale a dire $v^2 = 2(b - \omega)$; che è quanto dire che l' acqua si getta dall' apertura B del sifone con una velocità dovuta all' altezza BQ dell' acqua nel vaso sopra la stessa apertura.

COROLLARIO II.

190. Se il vaso NEC è cilindrico o prismatico, sicchè ciascuna sezione DF sia $= q = n$, e l' equazione diventi $Mf^2vdv + (b - \omega)ndr + \frac{f^2v^2dr}{2n} - \frac{1}{2}v^2ndr = 0$; allora supposto il sifone di figura conica; e l' apertura $B = f$, l' apertura $A = h$, si trova, come nel

 Pro-

Problema XII. §. 117, l' integrale $M = \int \frac{ds}{z}$ $= \frac{s-a}{n} - \frac{\lambda}{\sqrt{fh}}$, giacchè ivi c corrisponde qui ad a, ed ivi a corrisponde qui a λ. Facciasi ora, come conviene $s = r = \omega$; onde M diventi $\frac{r-a}{n} - \frac{\lambda}{\sqrt{fh}}$: e quindi si avrà l' equazione $\left(\frac{r-a}{n} - \frac{\lambda}{\sqrt{fh}}\right) f^2 v dv$ + $(b-r)ndr + \frac{f^2v^2dr}{2n} - \frac{1}{2}nv^2dr = 0$. Posta inoltre la velocità dell' acqua nel vaso $= u = \frac{fv}{n}$; e perciò $v^2 = \frac{n^2u^2}{f^2}$, la detta equazione si cangia in $\left(\frac{r-a}{n} - \frac{\lambda}{\sqrt{fh}}\right) n^2udu$ $+ (b-r)ndr + \frac{1}{2}nu^2dr - \frac{n^3u^2dr}{2f^2} = 0$, cioè in $\left(r - a - \frac{n\lambda}{\sqrt{fh}}\right)udu + (b-r)dr$ $+ \frac{1}{2}u^2dr - \frac{n^2u^2dr}{2f^2} = 0$, ovvero in $2\left(r - a - \frac{n\lambda}{\sqrt{fh}}\right)udu + 2(b-r)dr +$ $\left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right)u^2dr = 0$. Perlocchè, assunto $y =$ $r - a - \frac{n\lambda}{\sqrt{fh}}$; $dy = dr$; $r = y + a +$

$n\lambda$

$\frac{n\lambda}{\sqrt{fh}}$, l' equazione si converte in $2yudu +$ $\left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) u^2 dy = 2\left(\frac{n\lambda}{\sqrt{fh}} + a - b + y\right) dy$, e questa moltiplicata per $y^{-\frac{n^2}{f^2}}$, indi integrata dà $u^2 y^{1 - \frac{n^2}{f^2}} = \frac{2n\lambda f^2 y^{1 - \frac{n^2}{f^2}}}{(f^2 - n^2)\sqrt{fh}} +$ $\frac{2(a-b) f^2 y^{1 - \frac{n^2}{f^2}}}{f^2 - n^2} + \frac{2f^2 y^{2 - \frac{n^2}{f^2}}}{2f^2 - n^2} +$ Cost. E perchè $u = 0$ quando $r = 0$, cioè quando $y = -a - \frac{n\lambda}{\sqrt{fh}} = k$, si ottiene Cost. $= \frac{2n\lambda f^2 k^{1 - \frac{n^2}{f^2}}}{(n^2 - f^2)\sqrt{fh}} + \frac{2f^2(a-b) k^{1 - \frac{n^2}{f^2}}}{n^2 - f^2}$ $+ \frac{2f^2 k^{2 - \frac{n^2}{f^2}}}{n^2 - 2f^2}$. Dunque $u^2 = \frac{2n\lambda f^2}{(n^2 - f^2)\sqrt{fh}} \times$ $\left(\frac{k}{y}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} + \frac{2f^2(a-b)}{n^2 - f^2}\left(\frac{k}{y}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} +$

$$\frac{2f^2k}{n^2-2f^2}\left(\frac{k}{y}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}} - \frac{2n\lambda f^2}{(n^2-f^2)\sqrt{fh}} - \frac{2f^2(a-b)}{n^2-f^2} - \frac{2f^2y}{n^2-2f^2} = \frac{2n\lambda f^2+2f^2(a-b)\sqrt{fh}}{(n^2-f^2)\sqrt{fh}} \times \left(\left(\frac{k}{y}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}} - 1\right) + \frac{2f^2k}{n^2-2f^2} \times \left(\left(\frac{k}{y}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}} - \frac{y}{k}\right).$$

Da questa equazione si deduce' pel caso presente tutto ciò che se ne è ricavato nel citato Problema V. fino alla fine della Sezione II.

PROBLEMA XXXI.

191. *Ritrovare la velocità dell' acqua uscente dall' apertura* B *del sifone, quando il vaso si mantiene costantemente pieno.*

SOLUZIONE.

Si ricorra all' equazione $-b+\frac{n^2u^2}{2f^2}-\frac{n^2u^2}{2h^2}-\frac{n^2udu}{qdr}\int\frac{ds}{z}=0$ del Problema XVII. §. 134, la quale applicata al caso nostro ci manifesta doversi prendere $b=B$; $q=DF$, $r=LG$, che è la porzione della linea centrale relativa alla quantità d' acqua ver-

versata e riparata; $n =$ ad una data sezione del vaso; $u =$ alla velocità dell'acqua in questa sezione; $h =$ alla sezione suprema dell'acqua del vaso; $f = B$ apertura del sifone; $s =$ ad una porzione indefinita dalla linea centrale computata da L; $z =$ alla sezione indefinita corrispondente ad s. Dicasi λ la lunghezza del prisma d'acqua gettato dal lume B, ed uguale alla quantità d'acqua contenuta in $NDFC$. Si avrà dunque $qdr = fd\lambda$; $u^2 = \frac{f^2v^2}{n^2}$, nominando v la velocità all'apertura B. Perlocchè surrogati nell'equazione questi valori, essa si trasforma in $-b + \frac{1}{2}v^2 - \frac{f^2v^2}{2h^2} - \frac{fvdv}{d\lambda} \times \int\frac{ds}{z}$. L'integrale $\int\frac{ds}{z}$, che diremo M, dee prendersi talmente, che si annulli allorchè $s = LA + ACB =$ alla linea centrale di tutto il corpo d'acqua contenuto nel vaso $NIKC$, e nel sifone ACB; e nell'espressione che quindi risulta di detto integrale ha a farsi $s = 0$ a norma de' già divisati avvertimenti. Laonde si ottiene l'equazione $2fh^2Mvdv = (h^2 - f^2)v^2d\lambda - 2h^2bd\lambda$; e da questa si trae $d\lambda = \frac{2fh^2Mvdv}{(h^2 - f^2)v^2 - 2h^2b}$. Quindi con un calcolo affatto simile a quello del Problema XVII.

XVII. si trova finalmente $v^2 = \frac{2h^2b}{h^2 - f^2} \times \left(1 - e^{\frac{(h^2 - f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)$. Il che era ec.

COROLLARIO.

192. La velocità coſtante, a cui in breviſſimo tempo ſi avvicina eſtremamente la v, somminiſtra l' equazione $v^2 = \frac{2h^2b}{h^2 - f^2}$; donde ſi ricava $v^2 = 2b$ quando ſia h grandiſſimo in paragone di f.

Fig. 41. 193. Attraverso il fondo *BC* (*Fig.* 41.) del vaso *ABCD* ſi faccia paſſare il tubo *EF* aperto da ambe le parti, e queſto ſia coperto da un altro tubo più largo *GHI* aperto nella sola eſtremità *G* verso il fondo del vaſo. Versando dell' acqua nel vaso *ABCD*, queſta sale nella capacità interna del tubo *GHI* al livello dell' acqua del vaso, e ne caccia l' aria contenuta per l' apertura *F* dell' altro tubo. Ora fintanto che la superficie dell' acqua reſta più baſſa di *E*, non può uscire per *EF*: ma subito che eſſa s' innalza sopra di *E*, entra per l' apertura *E* nel tubo *EF*, e sorte per *F*. E ſiccome agiscono qui tutte quelle cause, che nel ſifone ordinario ſi sono contemplate, il fluſſo dell' acqua per *F* continua ſino al total vuotamento del vaso.

194.

I due tubi insieme formano un sifone, che ha un braccio inserito nell' altro; ed un vaso in tal maniera congegnato dicesi *Diabete*. Si può ancora in luogo di due tubi innestati uno dentro l' altro saldarne uno solo al fondo del vaso come *EF*, che allora non dee più esser diritto, ma incurvato a guisa d' un sifone comune così che il braccio dentro il vaso giunga vicino al fondo, e l' intero sifone non arrivi interamente all' altezza del vaso.

194. Posciachè la pressione dell' aria sulla superficie dell' acqua contenuta nel vaso *DEF* (Fig. 42) è l' unica causa del getto del sifone; e questa pressione non può contrabbilanciare una colonna d' acqua più alta di 32 piedi; perciò l' uso del sifone è confinato in circa a quest' altezza. La cima più alta *C* del sifone non dee sollevarsi sopra la superficie *DF* dell' acqua più di 32 piedi altrimenti non si ha più flusso. E ciò vale per tutti gli altri fluidi, avuto riguardo al divario che dee risultare dalle loro specifichè gravità. Così per esempio il sifone non potrà innalzare il mercurio oltre 28 pollici. Ma qualora non si oltrepasi l' altezza di 32 piedi si può anche senza l' immediata unione delle due braccia del sifone far salir l' acqua nella seguente maniera: Il tubo ascendente (Fig. 43) *DE* s' immerge coll' estremità inferiore *D* nel vaso aperto *AB* pieno d' acqua, e coll' altra estremità *E* entra nel vaso su-

Fig. 42.

Fig. 43.

ſuperiore *FG*: queſto vaſo è chiuſo con coperchio e talmente cuſtodito, che all'aria eſterna ſia tolto ogni acceſſo. All'altezza a un dipreſſo del vaſo *AB* havvi un altro vaſo *KL* pieno d'acqua, il quale per mezzo del tubo *IH* comunica col vaſo ſuperiore *FG*, e non meno di *FG* è eſattamente diſeſo dall' ingreſſo dell' aria eſterna. Si ſalda al fondo di queſto vaſo un tubo *MN* fornito d' una chiave *O*, la quale debbe eſſer più baſſa dell' apertura inferiore *D* del tubo aſcendente.

Aperta la chiave *O* ſcorre toſto l' acqua del vaſo *KL* pel tubo *MN*; e per conſeguenza l' aria contenuta nel vaſo *FG*, e ne' tubi *DE*, *HI* ſi dilata in uno ſpazio più grande di prima. Quindi la preſſione dell' atmosfera ſulla ſuperficie *AC* dell' acqua nel vaſo aperto *AB* prepondera alla contropreſſione dell' aria interna già rarefatta e meno elaſtica: ond' è che l' acqua dalla preponderanza dell' eſterna ſopra l' interna preſſione è obbligata a ſalire nel tubo *DE*, e gettarſi per l' apertura *E* nel vaſo *FG*.

195. Se la conſerva *AB* riceve da una ſorgente, o in altro modo un'acqua perenne, ſi può ſtabilire mediante un tubo *ST* provveduto della chiave *P*, per chiuderlo a piacere, una comunicazione fra *AB*, e *KL*. Adattato poi anche alla conſerva *FG* un altro tubo a chiave *Q*, può con ciò dirigerſi l' acqua innalzata all'

all' uso che si vorrà. Aprendosi P, e Q passa l'acqua da AB in KL, ed una parte dell' aria interna sorte per Q. Empito così il vaso KL si chiudono le chiavi P, e Q, e si apre O; ed allora discende l' acqua di KL per MN, e s' alza da AB in DE.

Un siffatto apparecchio si chiama *sifone interrotto* appunto perchè le sue braccia non si uniscono insieme.

196. E' cosa per se chiara, non dovere innalzarsi il tubo ascendente DE più di 32 pied. sopra AB, se l' acqua che sale per esso ha da vuotarsi in FG, per lo stesso motivo che nel sifone ordinario. Ma nel caso presente si tratta di altezze anche più picciole, siccome può di leggieri inferirsi dal riflettere, che se l' acqua ha da sollevarsi all' altezza di 32 pied. dee trovarsi libera da ogni interna contraria pressione: laddove nel nostro caso non è punto libera l' acqua che sale dall' interna pressione, che l' aria interior rarefatta esercita sopra di lei sebbene con minor galiardìa dell' aria esterna a motivo della indebolita elasticità per lo spazio maggiore in cui si dilata; elasticità che va appunto scemando nella ragione inversa degli spazj per cui l' aria si spande. E così se l' aria interna si difonde in uno spazio due volte maggiore di quello che occupa nello stato naturale, la sua elasticità resta la metà di quella di prima, e l' acqua non può con-

se-

ſeguentemente ſalire in *DE* oltre 16 piedi.

197. Per avere un ſufficiente ſcarico d' acqua dal vaſo *KL*, e però uno ſpazio baſtantemente grande, in cui l' aria interna dee dilatarſi, ſi dà al tubo *MN* una conſiderabil lunghezza. Imperciocchè l' acqua non può ſcaricarſi per *MN* ſe non fino a tanto che la preſſione dell' aria interna unita alla preſſione della colonna d' acqua *RN* ſorpaſſa la preſſione dell' aria eſterna: e ſiccome l' aria interna rarefatta preme più debolmente ſopra la ſuperficie *XY* dell'acqua nel vaſo *KL* che non preme l'eſterna contro *N*; perciò la colonna *RN* eſſer dee notabilmente lunga per vincere la ſteſſa preſſione.

198 Quando queſta macchina vuole eſeguirſi in grande, vi ſi richiede un altro particolar meccaniſmo per fare, che le chiavi *O*, *P*,*Q* da per ſe ſteſſe ſi aprano e ſi chiudano a tempo. Eſſendo per eſempio chiuſo *O* da principio, ed aperto *P* per empire *KL*, ſi apre nello ſteſſo tempo *Q* per dar eſito all' aria interna, la quale verebbe altrimenti compreſſa in uno ſpazio più anguſto dall' acqua che empie *KL*. Con traſcurare queſta circoſtanza non ſi avrebbe più l' alzata dell' acqua in *DE*. Empito poſcia *KL*, debbono chiuderſi *P*, e *Q*, ed aprirſi *O*, affinchè ſi vuoti *KL* ed intanto ſi riempia *FG*. Ciò fatto ſi chiude *O*, e ſi riaprono *P*, *Q*, affinchè di nuovo ſi empia *KL*, e nel tempo ſteſſo l' acqua ſollevata

in

in *FG* si porti per *Q* all' uso destinato.

In qual modo possano insieme combinarsi molti sifoni interrotti di tal fatta per portar l' acqua ad altezze assai maggiori delle accennate, può vedersi presso WOLF (*a*), e con più dettaglio presso LEUPOLD (*b*).

199. Si può col sifone interrotto formare in picciolo una specie di graziosa fontana. Sia a cagion d' esempio (Fig. 44.) *ABCD* un vaso pieno d' acqua con sopra un piatto *EF* fermato con sostegni all' orlo del vaso, a cui serve come di coperchio, con che però l' aria esterna abbia libero accesso nello spazio fra il piatto, e l' acqua del vaso. Attraverso il piatto *FE* passa un tubo diritto *HI*, che giugne coll' estremità inferiore *I* quasi al fondo del vaso, ed ha in *H* una picciolissima apertura. Per lo stesso piatto passa un altro tubo aperto alle due estremità, ripiegato sopra l' orlo del vaso, ed avente l' apertura inferiore *L* più bassa di *I*. Si colloca sul piatto una campana di vetro, e si luta intorno all' orlo sul piatto per impedire la comunicazion dell' aria esterna. Se ora succhiando in *L* si leva una parte dell' aria della campana; l' aria esterna spinge in alto pel tubo *IH* l' acqua del vaso *ABCD*, la qual cade in uno spruzzo sul piatto, e discen-

Fig. 34.

(*a*) Tom. II. *Elem. Mathem.* §. 79. 80. *Hydraul.*
(*b*) *Theatr. Machin. Hydraul.* T. I. §. 15.

ſcendendo pel tubo *KL* impediſce all' aria eſterna il ritorno nella campana. Quindi è, che ſe l'aria della campana è da principio baſtanremente rareſatta, ed *L* è baſſo quanto baſta, zampilla l' acqua non interrottamente dall' orifizio *H*, e ſcorre nel tempo ſteſſo per *L* fintanto che *I* ſi trova ſott' acqua.

200. La cagione, per cui l' acqua ſotto la campana è coſtretta a zampillare, è l' ecceſſo dell' elaſticità dell' aria eſterna ſopra l' elaſticità dell' interna. Può farſi in ſimil modo, che l' acqua zampilli da un vaſo chiuſo all' aria libera eſterna dando all' aria interna un elaterio maggiore del naturale. Sia per eſempio il vaſo *ABCD* (Fig. 45.) chiuſo con coperchio, attraverſo il quale paſſi il tubo *EF*, che coll' eſtremità inferiore *F* arriva quaſi al fondo del vaſo. L'eſtremità ſuperiore ſia tale, che poſſa comodamente avvitarſi ad una tromba pneumatica; e con una chiave *K* ſi apra e ſi tolga la comunicazione dell' aria eſterna. Empito ora d' acqua il vaſo *AC* ſino a *GH* verſo la metà, o anche meno, ed avvitandolo fermamente alla tromba pneumatica, ſi comprima col noto meccaniſmo l' aria interna del vaſo, ſicchè acquiſti maggior denſità dell' eſterna, e quindi anche maggiore elaſticità. La chiave *K* ſerve parimente a tener chiuſo il tubo fino a che ſi vuole far zampillare l' acqua, al qual effetto ſi ripone a dovere il vaſo ſulla ſua baſe *BC*, ſicchè l' acqua occupi

Fig. 45.

cupi la parte inferiore *GBCH* della capacità interna, e l'aria la superiore *AGHD*. Aprendosi in questo stato la chiave, sprizza l'acqua da *E* con impeto tanto maggiore quanto più grande è la compressione dell'aria del vaso. Sia pertanto il

PROBLEMA XXXII.

201. *Date tutte le dimensioni del vaso* ABCD, *e del tubo* EF *insieme all'elasticità dell'aria interna compressa: si dimanda la velocità, con cui sprizza l'acqua dalla luce* E *del tubo*.

SOLUZIONE.

Considerando il vaso *ABCD* come un tubo unito con *EF*, si applicherà anche a questo caso la formola del Problema V, la quale è $P = A - b + \omega + \frac{n^2u^2}{2f^2} - \frac{n^2u^2}{2q^2} - \frac{n^2udu}{qdr}\int\frac{ds}{z}$. Perlocchè supposto il vaso da principio riempito sino a *GH*, e nel tempo *t* vuotato della porzione d'acqua contenuta nello spazio *GMNH*, sarà ω = alla distanza della prima sezione *GH* dalla superficie *MN* dell'acqua; *r* la porzione *LS* della linea centrale fra le due dette sezioni; *q* la sezione *MN*; *n* una sezione nota e determinata; *u* la velocità dell'acqua in questa sezione; z una sezione indefinita; *s* la porzione della linea centrale com-

putata da GH ſino a detta ſezione; f l'area del foro E; P l'altezza d'una colonna d'acqua ſulla baſe MN, il di cui peſo equivale alla preſſione dell'aria compreſſa contro MN; A la preſſione naturale dell'atmoſfera: e ſiccome in queſto caſo la prima ſezione GH in vece di innalzarſi ſopra la luce E del tubo, per l'oppoſto ſi abbaſſa ſotto di quella; perciò dovendo b eſprimere l'innalzamento della prima ſezione ſopra la luce, diverrà qui negativo per poter rappreſentare lo ſtato oppoſto, oſſia l'abbaſſamento. Dunque ſi avrà $P = A + b + \omega + \frac{n^2u^2}{2f^2} - \frac{n^2u^2}{2q^2} - \frac{n^2udu}{qdr}\int\frac{ds}{z}$, ponendo ben mente di prendere l'integrale $\int\frac{ds}{z}$ in modo che ſi annulli quando s è $=$ a tutta la linea centrale $LF + FE$, e di mettere poſcia nell'eſpreſſione, che ne riſulta, r in luogo di s, e q in vece di z. Siccome pertanto A è l'altezza della colonna d'acqua ſulla baſe MN, il di cui peſo rappreſenta l'elaſticità o preſſione dell'aria nello ſtato naturale, facciaſi nel principio del moto $P = \mu A$ quando l'aria rinchiuſa riempiva lo ſpazio $AGHD$. Abbaſſata quindi GH in MN diventa $P = \frac{AGHD}{AMND}\cdot\mu A$. Da ciò ſi ſcorge dover eſſer P una funzione di ω come lo ſono per la nota forma del vaſo r, e q. Laonde ſi avrà per mezzo del cal-

colo

colo integrale un'equazione fra u ed ω, la quale farà conofcere la velocità dell'acqua per una propofta fezione, e in confeguenza anche per la luce E. Il che era ec.

COROLLARIO I.

202. Fatto $n = f$, ficchè u fignifichi la velocità dell'acqua che zampilla da E, fi ha $P = A + b + \omega + \frac{1}{2}u^2 - \frac{f^2u^2}{2q^2} - \frac{f^2udu}{qdt}\int\frac{ds}{z}$. Perciò fe le fezioni q del vafo fono molto grandi in paragone dell'area f del lume, per la picciolezza degli ultimi due termini che fi difprezzano, l'equazione fi cangia in $P = A + b + \omega + \frac{1}{2}u^2$, donde fi trae $u = \sqrt{(2P - 2A - 2b - 2\omega)} = \sqrt{(2P - 2A - 2ES)}$.

COROLLARIO I.

203. Suppofto $ABCD$ un vafo cilindrico o prifmatico retto verticalmente fituato, e fatto $OL = a$, nafce $\frac{AGHD}{AMND} = \frac{a}{a+\omega}$; e però $P = \frac{\mu a A}{a+\omega}$, e quindi $u = \sqrt{\left(\left(\frac{2\mu a}{a+\omega} - 2\right)A - 2(b+\omega)\right)}$. Adunque l'altezza dovuta a quefta velocità, cioè l'altezza del getto d'acqua fopra l'orifizio E, fuppofto il getto verticale, farà $\frac{1}{2}u^2$

 =

$$= \left(\frac{\mu a}{a + \omega} - 1 \right) A - (b + \omega)$$
$$= \left(\frac{\mu a}{a + \omega} - 1 \right) A - ES.$$

COROLLARIO II.

204. Esaminando la formola $u = \sqrt{\left(\left(\frac{2\mu a}{a + \omega} - 2 \right) A - 2(b + \omega) \right)}$ si scorge che il valore di u diventa massimo allorchè $\omega = 0$. Ciò potrebbe far credere, che la velocità fosse massima allorchè la superficie dell' acqua è ancora in GH cioè prima di muoversi, ma se si ha il dovuto riguardo ai due termini $- \frac{f^2 u^2}{2q^2} - \frac{f^2 u\, du}{q\, dt} \int \frac{ds}{z}$ della predetta equazione da noi qui disprezzati, si farà giudizio, che il valor massimo di u non si avrà nel principio del moto, quando quel valore è ancor nullo o infinitesimo, ma bensì dopo un tempo brevissimo, cioè quando GH sarà discesa per un' altezza picciolissima che fisicamente parlando si confonde col nulla. Pertanto la velocità massima è $\sqrt{[(2\mu - 2)A - 2b]} = \sqrt{[2 (\mu - 1)A - 2EL]}$; e in conseguenza l'altezza ad essa dovuta è $= (\mu - 1) A - EL$, che sarà l' altezza a cui arriva il getto d' acqua subito dopo il principio del moto, prescindendo però da tutti gli impedimenti che ritardano il moto, e sopra tutto dalla resistenza, che in-

con-

contra il getto nell' aria. In tanto quest'altezza andrà via via impicciolendosi a misura che si abbassa la superficie *GH* dell'acqua, e che l'aria interna ritrova un più ampio spazio per cui dilatarsi.

COROLLARIO III.

205. Se il vaso *ABCD* fosse tant'alto che potesse empirsi d'acqua sino all' altezza $(\mu - 1)A$ sopra *GH*; e se allora vi si adattasse lateralmente il tubo *EF*, per cui l'acqua potesse sprizzare per la pressione di quella del vaso, salirebbe il getto verticale, posti da parte tutti gli ostacoli, all'altezza mentovata $(\mu - 1)A - EL$. Ma per altro è un abbaglio quello di Wolf (*a*), e molt' altri, i quali asseriscono, che o si adopri la forza premente dell'aria condensata, o pur quella d' una colonna d'acqua equivalente, nell' uno e nall' altro caso dee risultare assolutamente lo stesso effetto. Ciò non può stare: imperciocchè nel secondo caso l'equazione differenziale a motivo di $P = A$ si converte in quest' altra $-b + \omega + \frac{1}{2}u^2 - \frac{f^2u^2}{2q^2} - \frac{f^2udu}{qdr}\int\frac{ds}{z}$ $= 0$, dove presentemente b esprime non più l' abbassamento, ma l'altezza della suprema sezione dell' acqua sopra di *E*; ω la discesa della suprema sezione nel tempo t; e l'integrale $\int\frac{ds}{z}$ ha da pigliarsi in tal modo, che svanisca con assumere s

 uguale

(*a*) AEROM. §. 91. *Elem. Mathem.* tom. II.

uguale alla linea centrale computata dalla suprema sezione dell' acqua, non per anco mossa, sino ad *F*, e da *F* sino ad *E*, e che nella sua espressione poscia si sostituisca in luogo di s la r, cioè la porzione della linea centrale corrispondente all' abbassamento della suprema sezione in detto tempo. Ora è manifesto, che con ciò si otterrà un' equazione affatto differente da quelle del caso primo. La diversità degli effetti, che in questi due casi debbono risultare, si rende ancora evidente con riflettere, che il peso della colonna d'acqua, che si solleva sopra *GH* all' altezza $(\mu - 1) A$ si trasfonde per tutta la massa, e dee porla tutta in movimento; laddove la pressione dell' aria interna condensata non può mettere in moto se non l' acqua contenuta nel vaso da *GH* sino ad *F*, e quello del tubo *FE*. E' ben vero, che nell' ipotesi dell' apertura *E* picciolissima in paragone dell' ampiezza del vaso, il moto della colonna d' acqua sopra *GH* non è punto sensibile; ed allora il getto d' acqua salir dee alla medesima altezza in ambedue i casi mentovati; ma appunto in questa sola ipotesi trovasi vera la proposizione di WOLF, falsa in tutte le altre.

206. La compressione dell' aria in un vaso può ottenersi altrimenti che colla tromba pneumatica; ma non si comprimerà mai tanto gagliardamente come colla tromba. Il vaso, dove il tubo s' insinua, può con un altro vaso per

mez-

mezzo di altri tubi talmente combinarsi, che l'acqua stessa comprima l'aria rinchiusa, e così formi una specie di fontana, che dall'inventore vien nominata *Fontana di* ERONE. Il meccanismo è questo: Il vaso *AB* (Fig. 46) è munito del tubo *EF*, e d'un coperchio cinto dall'orlo *AO* di alcuni pollici di altezza per poter contenere dell'acqua. In questa specie di piatto havvi un'apertura *G*, per cui passa un tubo *GH*, il quale si stende fino presso al fondo di un altro vaso inferiore *CD*. Nel coperchio di questo trovasi un'altra apertura *I* per la quale passa il tubo *IK*, e ascende fino quasi al coperchio del vaso superiore, il quale con un imbuto adattato ad un altro foro *M* fatto nel suo coperchio si empie d'acqua fino all'apertura *K* del tubo *IK*, e si chiude poscia esattamente *M* con un turacciolo. Allora si empie d'acqua il piatto *AO*, e questa cadendo pel tubo *GH* nel vaso inferiore *CD* ne scaccia l'aria che sale per *IK* nella parte vuota d'acqua del vaso *AB*, e però si restringe in uno spazio minore. La chiave del tubo *EF* tiensi chiusa, o in mancanza della chiave, l'apertura *E* si serra col dito fin tanto che cessa di discendere l'acqua pel tubo *GH*, ma resti sul piatto, sicchè l'aria venga compressa di tanto, quanto può effettuarsi colla pressione dell'acqua. In tale stato di cose se si apre la chiave o si leva il dito da *E*, l'acqua zampilla da *E* per la stessa causa del

Fig. 46.

§. antecedente; e perchè quest' acqua ricade sul piatto, seguita la fontana non interrottamente a buttare fino al total vuotamento del vaso *AB*. Imperciocchè a misura che l' acqua si abbassa in *AB*, l' aria compressa si estende in uno spazio più grande, e perde parte del suo elaterio, e meno in conseguenza preme contro la superficie *PQ* dell' acqua del vaso *CD*; e quindi prosiegue l' acqua del piatto a discendere continuamente pel tubo *GH*. Da ciò si fa manifesto, che l' aria guadagna tanto di spazio al di sopra, quanto ne perde al di sotto, e rimane perciò in uno stato di compressione fintanto che giugne a poter insinuarsi pel tubo *FE* ed equilibrarsi coll' aria esteriore.

PROBLEMA XXXIII.

207. *Ritrovare la velocità dell' acqua che spiccia dalla Fontana di* ERONE, *nel supposto che l' apertura* E *sia picciolissima in confronto delle sezioni del vaso* AB.

SOLUZIONE.

Trattasi solo di conoscere l' elasticità dell' aria rinchiusa. Pertanto sull' acqua del piatto *AO* preme l' atmosfera, la di cui pressione è rappresentata dal peso d' una colonna d' acqua di altezza *A*. L' aria rinchiusa soffre ancor essa una tal pressione, ed inoltre quella della colonna d' acqua *GN*, la di cui altezza uguaglia

quella

quella della superficie dell' acqua nel piatto sopra la superficie PQ. Per la qual cosa l' elasticità dell' aria rinchiusa è $= A + GN$, e l' eccesso di questa elasticità sopra quella dell' aria esterna è $= GN$. Quindi s' inferisce, come nel §. 203, che l' acqua zampillerà da E con una velocità dovuta all' altezza $GN - EL$. Il che era ec.

COROLLARIO

208. Quanto maggiore diventa l' altezza dell' acqua nel vaso CD, tanto minore all' opposto si rende GN, e maggiore EL. Perlocchè la velocità dell' acqua scema ognor più a misura che si va vuotando il vaso AB. Apparisce oltracciò, che lo spazio occupato dall' aria rinchiusa si va a poco a poco ingrandendo, perchè la colonna d' acqua sostenuta dall'aria si va di mano in mano impicciolendo. E' poi facile accorgersi, che, a parlar esattamente, non tutta l' acqua che ricade sul piatto può discendere nel vaso CD. A rendere per altro insensibile questo cangiamento di elasticità nell' aria rinchiusa convien prendere il vaso CD pressocchè della stessa grandezza di AB, e collocarlo molto al di sotto di AB. Si può inoltre munire il vaso CD di una chiave per dare all' acqua cadutavi dentro l' uscita.

209. È noto dall' Aerostatica, che l' elasticità dell' aria può rinvigorirsi eziandio col calore

lore rimanendo la ſteſſa la ſua denſità. Quindi è, che anche col mezzo del calore ſi può fare zampillar l' acqua comunicando col fuoco una maggior energia all' elaſticità dell' aria premente. Il meccaniſmo a tal effetto è ſimile all' ora deſcritta Fontana d' ERONE, togliendoſi ſolo il tubo *GH* che dal piatto portava l' acqua nel vaſo inferiore per comprimere l' aria interna. Secondariamente nella Fontana d' ERONE era vantaggioſo di collocare il vaſo *AB* in ſufficiente altezza ſopra *CD*, da ciò dipendendo la denſità e l' elaſticità dell' aria rinchiuſa. Queſta condizione non ha qui luogo, e il vaſo ſuperiore può metterſi immediatamente ſopra l' inferiore, e fare che il fondo di quello ſerva di coperchio a queſto. Se ora ſi eſpone al fuoco il vaſo inferiore, il calore accreſce l' elaſticità dell' aria in eſſo rinchiuſa, la quale ſalendo come nella fontana di ERONE pel tubo *IK* nel vaſo ſuperiore sforza l' acqua in eſſo contenuta ad uſcire pel tubo *FE*.

SE-

SEZIONE VII.

Del Moto dell' acqua ne' vasi e tubi sommersi.

PROBLEMA XXXIV.

210. *Il vaso o tubo* ANPFB (Fig. 29.) *mantenuto costantemente pieno d' acqua fino ad* AB *s' immerge in un altro vaso o conserva d' acqua* (a) *fino alla profondità* LG *della luce sotto il pian di livello : si cerca con qual velocità si slanci l' acqua dalla luce* PF *nell' acqua circostante della conserva, supposto che il moto sia ridotto uniforme.* Fig. 29.

SOLUZIONE.

Dal Problema III. si ha l' equazione $p = h + \frac{f^2c^2}{2a^2} + x - \frac{f^2c^2}{2z^2}$, dove p esprime la pressione nella sezione indeterminata NT, h la pressione dell' atmosfera, x l' ascissa IL, z la sezione mentovata NT, f la luce PF, a la sezione suprema AB, c la velocità che qui si cerca. Chiamata ora b l' ascissa IG, cioè l'

(a) In tutto questo Capo si supporrà sempre (se altro non si avverte) l' acqua stagnante, in cui il vaso s' immerge, come infinita in paragone dell' acqua del vaso.

l'altezza della sezione suprema sopra l' infima, ed α la profondità LG della luce sotto il pian di livello dell' acqua della conserva; egli è manifesto, che quando si fa $x = b$, $z = f$, allora diventa $p =$ all' altezza d' una colonna d' acqua, il di cui peso rappresenta la pressione contro la luce PF, pressione che dipende sì dall' acqua stagnante della conserva, dentro cui il tubo s' immerge, come pure dall' atmosfera che preme contro il pian di livello LC, sicchè nominando H la pressione dell' atmosfera contro LC ne nasce $p = H + \alpha$. Laonde la predetta equazione diviene $H + \alpha = h + \frac{f^2c^2}{2a^2} + b - \frac{1}{2}c^2$, dalla quale deriva $c = \sqrt{\frac{2a^2(b + h - H - \alpha)}{a^2 - f^2}}$. Il che era ec.

211. Qualora la superficie LC dell' acqua della conserva, in cui si tuffa il tubo AF, non è che di alcuni piedi più bassa di AB; allora essendo senza alcun errore sensibile $h = H$, ne risulta $c = \sqrt{\frac{2a^2(b - \alpha)}{a^2 - f^2}}$; e quindi $\frac{1}{2}c^2 = \frac{a^2(b - \alpha)}{a^2 - f^2}$, vale a dire il seguente

TEOREMA XIX.

212. *L' altezza dovuta alla velocità dell' acqua, che esce dalla luce d' un tubo sommerso nell' anzidetta ipotesi, è quarta proporzionale alla diffe-*

renza

renza de' quadrati delle due sezioni suprema ed infima, al quadrato della sezione suprema, ed all' altezza di questa sezione sopra la superficie dell' acqua stagnante, dove il tubo s' immerge.

Se il foro f si assume picciolissimo in paragone della suprema sezione a, nasce a un dipresso $\frac{1}{2}c^2 = b - \alpha$, e quindi il

TEOREMA XX.

213. *L' altezza dovuta alla velocità dell' acqua uscente da una luce angustissima del tubo sommerso è prossimamente l' altezza stessa dell' acqua del tubo sopra l' acqua stagnante dove trovasi immerso.*

COROLLARIO.

214. La velocità dell'acqua per qualunque sezione $NT = z$ del tubo è $= \frac{f}{z}\sqrt{2a^2 \times (b - \alpha)}$.

PROBLEMA XXXV.

215. *Nello stesso vaso sommerso* AF *l' acqua che lo riempiva va successivamente vuotandosi per l'orifizio* PF; *e dopo un certo tempo soffre un dispendio della quantità d' acqua che occupava la capacità* AKVB: *si domanda per la fine d' un tal tempo la velocità dell' acqua che passa per una data sezione* Qβ.

Se-

SOLUZIONE.

Applicando a questa ipotesi della sommersione l' equazione del Problema V. $P = A - b + \frac{n^2u^2}{2f^2} - \frac{n^2u^2}{2q^2} + \omega - \frac{n^2udu}{qdr}\int\frac{ds}{z}$ si fa manifesto, che A dee denotare non solo l'altezza H dalla colonna d'acqua equiponderante all' atmosfera, che preme sopra il pian di livello LC, ma anco l' altezza α dell' acqua stagnante della conserva sopra l' orifizio del tubo, e però riesce $A = H + \alpha$. Quindi qualora non sia estremamente grande la IL, la predetta equazione diventa $b - \alpha - \omega - \frac{n^2u^2}{2f^2} + \frac{n^2u^2}{2q^2} + \frac{n^2udu}{qdr}\int\frac{ds}{z} = o$, pigliando l' integrale $\int\frac{ds}{z}$ in modo, che svanisca quando $s = ICE = \Delta$, è nella sua espressione sostituendo poscia Ii, overo r per s. Il perchè siccome la sezione $KV = q$, e l' ascissa $I\gamma = \omega$ debbono esser date in funzioni di $Ii = r$, nascerà un' equazione differenziale fra r, ed u, la quale integrata darà ciò che si cerca. Il che era ec.

COROLLARIO.

216. Chiamata v la celerità nella luce PF si ha $u = \frac{fv}{n}$, che surrogato nella precedente

dente equazione somministra $b - \omega - \alpha - \frac{1}{2}v^2 + \frac{f^2v^2}{2q^2} + \frac{f^2vdv}{qdr}\int\frac{ds}{z} = 0$. Da ciò apparisce, che qualora sia la luce f picciolissima in confronto della sezione q si possono disprezzare i due ultimi termini, e quindi se ne raccoglie $\frac{1}{2}v^2 = b - \omega - \alpha = IG - I\gamma - LG = \gamma L$, vale a dire il seguente

TEOREMA XXI.

217. *In un vaso o tubo sommerso, che tramanda acqua da un picciolissimo lume aperto nel fondo, la velocità dell' uscita è dovuta all' altezza dell' acqua, che rimane nel tubo, sopra la superficie dell' acqua stagnante, dove il tubo s' immerge.*

PROBLEMA XXXVI.

218. *Ritrovare la velocità dell' acqua, che esce dal lume d' un vaso cilindrico o prismatico retto e verticale sommerso, nell' ipotesi che l' altezza dell' acqua del vaso sopra il lume nel principio del moto sia* = b.

SOLUZIONE.

Nell' equazione $b - \omega - \alpha - \frac{1}{2}v^2 + \frac{f^2v^2}{2q^2} + \frac{f^2vdv}{qdr}\int\frac{ds}{z} = 0$ diventa in questa ipotesi $q = z = n = Q\beta$, $r = \omega$, $\Delta = b$; e perchè $\int\frac{ds}{z}$ deve annientarsi allorchè

chè $s = \Delta = b$, nasce $\int \frac{ds}{z} = \frac{s}{n} - \frac{b}{n}$; dove dovendo farsi $s = r = \omega =$ all'altezza per cui è discesa l'acqua nel vaso in quel tempo, dopo il quale si domanda la celerità, si ha perciò $\int \frac{ds}{z} = \frac{\omega - b}{n}$. Il perchè l'equazione si trasforma in $b - \omega - \alpha - \frac{1}{2}v^2 + \frac{f^2 v^2}{2n^2} + \frac{f^2 v dv}{n d\omega}\left(\frac{\omega - b}{n}\right) = o$, cioè $2(b - \omega - \alpha) n^2 d\omega - n^2 v^2 d\omega + f^2 v^2 d\omega + 2 f^2 (\omega - b) v dv = o$. Si faccia $\lambda = b - \omega$, e però $d\lambda = - d\omega$, e si otterrà $- 2(\lambda - \alpha) n^2 d\lambda + n^2 v^2 d\lambda - f^2 v^2 d\lambda - 2 f^2 \lambda v dv = o$, ovvero $2\lambda v dv + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) v^2 d\lambda = - 2(\lambda - \alpha)\frac{n^2 d\lambda}{f^2}$. Si moltiplichi quest' equazione per $\lambda^{\frac{-n^2}{f^2}}$, onde abbiasi $2\lambda^{1 - \frac{n^2}{f^2}} v dv + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) v^2 \lambda^{\frac{-n^2}{f^2}} d\lambda = - \frac{2n^2 \lambda^{1 - \frac{n^2}{f^2}} d\lambda}{f^2} + \frac{2\alpha n^2 \lambda^{\frac{-n^2}{f^2}} d\lambda}{f^2}$, il di cui integrale è $v^2 \lambda^{1 - \frac{n^2}{f^2}}$ —

$$= - \frac{2n^2\lambda^{2 - \frac{n^2}{f^2}}}{2f^2 - n^2} + \frac{2\alpha n^2\lambda^{1 - \frac{n^2}{f^2}}}{f^2 - n^2}$$

$$+ \text{Coſt.} = \frac{2n^2\lambda^{2 - \frac{n^2}{f^2}}}{n^2 - 2f^2} - \frac{2\alpha n^2\lambda^{1 - \frac{n^2}{f^2}}}{n^2 - f^2}$$

$+$ Coſt. Per determinar la Coſt. baſta riflettere, che nel principio del moto quando $v = o$, diventa $w = o$, oſſia $\lambda = b$; il che ſomministra Coſt. $= \frac{2\alpha n^2 b^{1 - \frac{n^2}{f^2}}}{n^2 - f^2} - \frac{2n^2 b^{2 - \frac{n^2}{f^2}}}{n^2 - 2f^2}$;

e da ciò finalmente ſi deduce $v^2 = \frac{2n^2 b}{n^2 - 2f^2} \times$

$$\left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{b}{\lambda} \right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} \right) - \frac{2n^2\alpha}{n^2 - f^2} \times$$

$\left(1 - \left(\frac{b}{\lambda} \right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} \right)$; e quindi $\frac{1}{2}v^2$, cioè l' altezza dovuta alla velocità dell' uſcita $=$

$$\frac{n^2 b}{n^2 - 2f^2} \left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{b}{\lambda} \right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} \right) -$$

$\frac{n^2\alpha}{n^2 - f^2} \left(1 - \left(\frac{b}{\lambda} \right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} \right)$. E ſe in

questa espressione si mette f^2 in luogo di n^2 ne' numeratori delle due frazioni moltiplicanti si ritrova il valore di $\frac{f^2 v^2}{2n^2}$, ovvero di $\frac{1}{2}u^2$ che è l'altezza dovuta alla velocità dell'acqua nel passare per qualunque sezione del vaso. Il che era ec.

COROLLARIO I.

219. Se la luce f si vuole picciolissima in paragone della larghezza n del vaso cilindrico il termine $\left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}} = \left(\frac{b-\omega}{b}\right)^{\frac{n^2-f^2}{f^2}}$ diventa estremamente picciolo; e trascuratolo si acquista $\frac{1}{2}v^2 = \frac{n^2\lambda}{n^2-2f^2} - \frac{n^2\alpha}{n^2-f^2} = \lambda - \alpha = b - \omega - \alpha$, vale a dire la velocità, con cui l'acqua si lancia dal lume, è dovuta all'altezza dell'acqua che resta nel vaso sopra la superficie della stagnante, dove il vaso è tuffato, come nel Teorema XXI.

COROLLARIO II.

220. Supposto il vaso tutto aperto nel fondo, ossia $f = n$, il secondo termine del valore di v^2 diventa $\frac{0}{0}$, che non ci fa nulla conoscere. In tal caso convien ritornare all'equazione

zione differenziale $2\lambda v dv + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) v^2 d\lambda$ $= - 2(\lambda - \alpha)\frac{n^2 d\lambda}{f^2}$, la quale diventa $2\lambda v dv = - 2(\lambda - \alpha)d\lambda$, ed ha per integrale $v^2 = 2\alpha \log. \lambda - 2\lambda +$ Coſt.; e dovendo eſſere $v = o$ quando $\lambda = b$, ſi ottiene $v^2 = 2b - 2\lambda + 2\alpha \log. \frac{\lambda}{b}$. Se ora ſi fa $v^2 = 2b - 2\lambda + 2\alpha \log. \frac{\lambda}{b} = o$, ſi arriva a conoſcere la maſſima diſceſa λ, a cui può giugnere l' acqua dentro il vaſo cilindrico ſenza fondo. Di qui appariſce, che λ non può mai eſſer zero, cioè l' acqua non può diſcender tutta nel vaſo, nè queſto interamente vuotarſi; altrimenti ſarebbe $\log. o = - \frac{b}{\alpha}$, cioè $\frac{b}{\alpha} = \infty$.

221. Queſto Corollario ſi dimoſtra immediatamente in queſt' altra maniera: Sia il vaſo retto cilindrico *FMNG* (Fig. 27.) tutto aperto ſotto e ſopra, e verticalmente tuffato nell' acqua ſino in *CD*, eſſendo egli ſteſſo ripieno d' acqua ſino ad *FG* nel momento dell' immerſione. Facciaſi $QO = \alpha$, $QR = b$, $MN = n$, e ſupponendo, che l' acqua ſia diſceſa dentro il cilindro ſino in *PH*, pongaſi $QA = \lambda$. Ora è evidente, che l' acqua contenuta

Fig. 27.

 in

in *CMND* non può in verun modo contribuire al moto dell' acqua nel vaso, perciocchè essa è equilibrata da quella del recipiente dove il vaso s' immerge. Rimane adunque l' acqua contenuta in *PCDH*, la quale col suo peso $= (\lambda - \alpha)n$ spinge d'alto in basso tutta la massa *PMNH* $= \lambda n$. Laonde la forza acceleratrice dell'acqua nel vaso è $= \frac{(\lambda - \alpha)n}{\lambda n} = \frac{\lambda - \alpha}{\lambda}$, e questa moltiplicata per $Aa = - d\lambda$, produce $- \frac{(\lambda - \alpha)}{\lambda} d\lambda = vdv$. Quindi integrando $v^2 = 2\alpha \log. \lambda - 2\lambda +$ Cost.; e perchè si annulla v quando $\lambda = b$, nasce $v^2 = 2b - 2\lambda + 2\alpha \log. \frac{\lambda}{b}$, come prima.

COROLLARIO III.

222. Stando a questo caso del vaso cilindrico senza fondo, e cercando la velocità massima, dall' equazione differenziale $2\lambda vdv = - 2(\lambda - a)d\lambda$, posto $dv = 0$, si ritrae $\lambda = \alpha$; il che indica esser *massima la velocità allorchè la superficie dell' acqua interna del vaso è discesa al livello dell' esterna*. L' altezza poi dovuta a tale massima celerità è $\frac{1}{2}v^2 = b - \alpha + \alpha \log. \frac{\alpha}{b}$. Perciò se $b - \alpha$ è una picciolissima quantità $= c$, vale a dire se la parte del vaso fuor d' acqua è picciolissima in confronto del-

la

la parte sommersa, allora l' altezza dovuta alla massima velocità è $= c + (b-c)\log.\left(1 - \frac{c}{b}\right)$ $= c + (b - c)\left(-\frac{c}{b} - \frac{c^2}{2b^2}\right) = \frac{c^2}{2b}$, cioè *terza proporzionale alla doppia altezza del vaso, e all' altezza della sua parte fuor d'acqua*; il che dà a divedere, che il moto esser dee lentissimo.

COROLLARIO IV.

223. Si faccia adesso l'ipotesi, che sia $n = f\sqrt{2}$; e nell'equazione del Problema il primo termine del valore di v^2 si trasforma in $\frac{o}{o}$, che ci avverte di fare un passo indietro, e ripigliare l' equazione differenziale $2\lambda v dv + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right)v^2 d\lambda = -2(\lambda - \alpha)\frac{n^2 d\lambda}{f^2}$, la quale si cangia in $2\lambda v dv - v^2 d\lambda = -4(\lambda - \alpha)d\lambda$, ovvero in $\frac{2\lambda v dv - v^2 d\lambda}{\lambda^2} = \frac{4(\alpha - \lambda)d\lambda}{\lambda^2}$. L' integrazione somministra $\frac{v^2}{\lambda} = -\frac{4\alpha}{\lambda} - 4\log.\lambda + \text{Cost.}$ Si determina la costante mercè la condizione di $v = o$ quando $\lambda = b$. Laonde $v^2 = \frac{4\alpha\lambda}{b} - 4\alpha + 4\lambda\log.\frac{b}{\lambda}$, e l' altezza dovuta alla velocità dell' uscita sarà

 $\frac{2\alpha}{b}\times$

$\frac{2\alpha}{b}(\lambda - b) + 2\lambda \log. \frac{b}{\lambda}$. E se presentemente si fa $\frac{2\alpha}{b}(\lambda - b) + 2\lambda \log. \frac{b}{\lambda} = o$ si conoscerà la massima discesa dell' acqua dentro il vaso mediante il valore di λ, che è l' altezza dell' acqua residua. Questa equazione ci fa conoscere non potersi mai vuotare interamente il vaso, cioè λ divenire $= o$, perchè nascerebbe $\alpha = - o \log. o$, che è un valore infinitesimo, siccome è noto.

COROLLARIO V.

224. Per avere in questo stesso caso la massima velocità si assume $2vdv = o$, ovvero $\frac{\alpha d\lambda}{b} + d\lambda \log. \frac{b}{\lambda} - d\lambda = o$; donde si deduce $\log. \frac{b}{\lambda} = \frac{b - \alpha}{b}$. Laonde pigliando e pel numero il di cui logaritmo iperbolico è l' unità, trovasi $\frac{b}{\lambda} = e^{\frac{b-\alpha}{b}}$, e però $\lambda = be^{\frac{\alpha - b}{b}}$, che dà il luogo della massima velocità: surrogato poi questo valore di λ in quello di $\frac{1}{2}v^2$ si ha l' altezza dovuta alla stessa massima celerità.

Co-

COROLLARIO VI.

225. Ricorrendo all' equazione generale

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{n^2 b}{n^2 - 2f^2}\left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}}\right)$$

$$- \frac{n^2 a}{n^2 - f^2}\left(1 - \left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}}\right),$$ si conoscerà in generale sino a qual profondità può discendere l' acqua nel vaso sommerso con fare $v = 0$; donde si ottiene l' equazione

$$\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{n^2}{f^2} - 1} = \frac{(n^2 - 2f^2)a - (n^2 - f^2)\lambda}{(n^2 - 2f^2)a - (n^2 - f^2)b},$$

di cui si troverà la radice λ per l' Algebra ordinaria. Da questa equazione apparisce, che λ non può mai essere $= 0$, nè per conseguenza vuotarsi interamente il vaso, altrimenti sarebbe
$$\frac{(n^2 - 2f^2)a}{(n^2 - 2f^2)a - (n^2 - f^2)b} = 0,$$ che ripugna trattone il caso di $n^2 - 2f^2 = 0$, il quale però ricade nel Cor. IV.

COROLLARIO VII.

226. Se si suppone a picciolissima in paragone di b, il che accade quando il fondo del vaso cilindrico rade la superficie dell' acqua stagnante, diviene allora $\frac{1}{2}v^2 = \frac{n^2 b}{n^2 - 2f^2} \times$

$\left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{\lambda}{b} \right)^{\frac{n^2}{f^2} - 1} \right)$, che è appunto l'equazione ritrovata nel Problema VI. pel caso, in cui l'acqua si slanciava dall'apertura del vaso cilindrico nell'aria. E ciò vale a dimostrare un insigne paradosso confermato dall'esperienza, che *o s' immerge il vaso un tantino nell' acqua, o si tenga tutto al di fuori, la velocità, con cui l'acqua va scaricandosi pel foro, è nell'uno e nell' altro caso la stessa*: il che dà a dividere, che l'aria poco o nulla resiste all' efflusso dell' acqua, mentre una resistenza 800 e più volte maggiore di quella dell' aria non fa punto variare l' effetto.

COROLLARIO VIII.

227. Se il cilindro s' immerge pressocchè tutto, onde l' altezza dell' acqua interna sopra l' esterna possa trascurarsi in paragone della parte sommersa, e quest' altezza, che è $b - \alpha$ si fa $= c$, come pure $b - \lambda = y$, dove c, ed y potranno disprezzarsi in confronto di b, ed α; allora essendo $\lambda = b - y$, sarà $\lambda^{\frac{n^2}{f^2} - 1} = (b - y)^{\frac{n^2}{f^2} - 1}$

$= b^{\frac{n^2}{f^2} - 1} - \left(\frac{n^2}{f^2} - 1 \right) b^{\frac{n^2}{f^2} - 2} y$

+

$$+\frac{\left(\frac{n^2}{f^2}-1\right)\left(\frac{n^2}{f^2}-2\right)}{2}\, b^{\frac{n^2}{f^2}-3}\, y^2$$

$$-\frac{\left(\frac{n^2}{f^2}-1\right)\left(\frac{n^2}{f^2}-2\right)\left(\frac{n^2}{f^2}-3\right)}{2\cdot 3}\, b^{\frac{n^2}{f^2}-4}\, y^3$$

$+$ ec., della qual serie basterà prendere i soli primi tre termini. Ora se nell' equazione $\frac{1}{2}v^2 = \frac{n^2 b}{n^2-2f^2}\left(\frac{\lambda}{b}-\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{n^2}{f^2}-1}\right)$ $-\frac{n^2\alpha}{n^2-f^2}\left(1-\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{n^2}{f^2}-1}\right)$ si sostituisce il valor ritrovato, si ritrova $\frac{1}{2}v^2$

$$=\frac{n^2 b}{n^2-2f^2}\left(\frac{b-y}{b}-1+\left(\frac{n^2}{f^2}-1\right)\frac{y}{b}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{n^2}{f^2}-1\right)\left(\frac{n^2}{f^2}-2\right)}{2}\,\frac{y^2}{b^2}+\text{ec.}\right)$$

$$-\frac{n^2\alpha}{n^2-f^2}\left(1-1+\left(\frac{n^2}{f^2}-1\right)\frac{y}{b}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{n^2}{f^2}-1\right)\left(\frac{n^2}{f^2}-2\right)}{2}\,\frac{y^2}{b^2}+\text{ec.}\right)$$

$$=\frac{n^2 b}{n^2-2f^2}\left(\left(\frac{n^2}{f^2}-2\right)\frac{y}{b}\right.$$

$-$

$$-\frac{\left(\frac{n^2}{f^2}-1\right)\left(\frac{n^2}{f^2}-2\right)}{2}\frac{y^2}{b^2}+\text{ec.}\Big)$$

$$-\frac{n^2\alpha}{n^2-f^2}\left(\left(\frac{n^2}{f^2}-1\right)\frac{y}{b}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{n^2}{f^2}-1\right)\left(\frac{n^2}{f^2}-2\right)}{2}\frac{y^2}{b^2}+\text{ec.}\right)$$

$$=\frac{n^2b}{f^2}\left(\frac{y}{b}-\frac{\left(\frac{n^2}{f^2}-1\right)}{2}\frac{y^2}{b^2}+\text{ec.}\right)$$

$$-\frac{n^2\alpha}{f^2}\left(\frac{y}{b}-\frac{\left(\frac{n^2}{f^2}-2\right)}{2}\frac{y^2}{b^2}+\text{ec.}\right)$$

$$=\frac{n^2cy}{f^2b}-\frac{n^4cy^2}{2f^4b^2}+\frac{n^2y^2}{2f^2b}-\frac{n^2\alpha y^2}{f^2b^2},$$

dove ponendo $b - c$ per α nasce $\frac{1}{2}v^2$ $=\frac{n^2cy}{f^2b}-\frac{n^4cy^2}{2f^4b^2}-\frac{n^2y^2}{2f^2b}+\frac{n^2cy^2}{f^2b^2}$, e disprezzando il termine secondo e quarto affetti da un prodotto di tre dimensioni delle due picciolissime grandezze c, ed y, risulta in fine $\frac{1}{2}v^2=\frac{n^2(2cy-y^2)}{2f^2b}$. Chiamando poi u la velocità dell' acqua dentro il vaso, si ha $\frac{1}{2}u^2=\frac{f^2v^2}{2n^2}=\frac{2cy-y^2}{2b}$, la qual espressione

non

non involge più le quantità n, ed f. Di qui deriva un inaſpettato paradoſſo, cioè che *ne' vaſi cilindrici infinitamente ſommerſi, qualunque ſia la loro apertura nel fondo, il moto dell' acqua interna rimane lo ſteſſo, talmente che con diminuire la luce non ſi ritarda punto quel moto.*

228. Qui però biſogna avvertire, che in queſto calcolo abbiamo conſiderato come eſtremamente picciole le quantità $\frac{c}{b}$, $\frac{y}{b}$ non ſolo riguardo all' unità, ma anche riguardo ad $\frac{f^2}{n^2}$, al che ſi dee con ogni cautela por mente nel fare gli ſperimenti in conferma della Teoria. Si può, dice il Sig. DANIELLO BERNOULLI (a), ridurre all' eſperienza ſenza notabil errore la Teoria delle quantità infiniteſime con diminuire di molto quelle quantità, che in teoria ſi riguardavano come infinitamente picciole, ma è d' uopo far sì, che nell' eſperimento tutto ubbidiſca a queſta legge. Così per eſempio ſe il cilindro ſarà ſenza fondo, cioè $n = f$, e verrà ſommerſo all'altezza di 35 pollici, l'eſperimento riuſcirà baſtantemente accurato, qualora l' acqua avanti le oſcillazioni s' innalzerà d' un ſolo pollice ſopra l' acqua circoſtante della conſerva: nè l' errore riuſcirà ancora notabile ſe l' apertura inferiore ſarà la metà del fondo, ſtando allora

(a) Hydrod. Sect. VII. §. 10.

allora $\frac{c}{b} : \frac{f^2}{n^2} :: \frac{1}{36} : \frac{1}{4} :: 1 : 9$, il qual rapporto in queſto eſperimento può traſcurarſi. Ma ſe ſi piglia il diametro della luce uguale alla metà del diametro del tubo cilindrico, ne viene allora $\frac{c}{b} : \frac{f^2}{n^2} :: \frac{1}{36} : \frac{1}{16} :: 4 : 9$, il qual rapporto non è più abbaſtanza picciolo perchè l' eſperienza poſſa con ſufficiente preciſione ſoddisfare alle condizioni della teoria.

Paſſiamo ora ad indagare que' caſi, in cui le quantità $\frac{c}{b}$, ed $\frac{f^2}{n^2}$ hanno un rapporto ſenſibile fra loro, reſtando però ambedue piccioliſſime, come accade allorchè il cilindro ſi ſommerge profondiſſimamente, non rimanendo che una parte inſenſibile fuor d' acqua, ed oltracciò è forato con un piccioliſſimo pertugiò nel fondo. Ciò formerà il ſoggetto del

COROLLARIO IX.

229. Ritorno all' equazione differenziale $n^2v^2d\lambda - f^2v^2d\lambda - 2f^2\lambda vdv - 2(\lambda - \alpha)n^2d\lambda = 0$, e chiamo u la velocità dell' acqua, che paſſa per la sezione corriſpondente all' altezza λ sopra il fondo; onde sarà $v^2 = \frac{n^2u^2}{f^2}$, $vdv = \frac{n^2udu}{f^2}$, e ſoſtituiti queſti valori in detta equa-

zione

zione, si ottiene $\frac{n^4u^2d\lambda}{f^2} - n^2u^2d\lambda - 2n^2\lambda udu$ $- 2(\lambda - \alpha)n^2d\lambda = 0$, ovvero $\frac{n^2u^2d\lambda}{f^2}$ $- u^2d\lambda - 2\lambda udu - 2(\lambda - \alpha)d\lambda = 0$. E siccome già si è assunto $b - \alpha = c$, $b - \lambda = y$, sostituisco in quest' ultima equazione $b - c$ in vece di α, e $b - y$ in luogo di λ, e ciò fatto ottengo $u^2dy -$ $2(b - y)udu - \frac{n^2u^2dy}{f^2} + 2(c - y)dy$ $= 0$, ovvero $2(c - y)dy = (\frac{n^2}{f^2} - 1)u^2dy$ $+ 2(b - y)udu$, la qual equazione, per essere in questo caso assai prossimamente $\frac{n^2}{f^2} -$ $1 = \frac{n^2}{f^2}$, e $b - y = b$, si trasforma in $\frac{n^2}{f^2}u^2dy + 2budu - 2(c - y)dy = 0$, e questa trattasi ora d' integrare. A tal effetto io la moltiplico per la quantità esponenziale $e^{\frac{n^2y}{bf^2}}$, in cui e denota il numero, il di cui logaritmo iperbolico è l' unità. Fatta una tale moltiplicazione ricavo $\frac{n^2}{2bf^2}u^2e^{\frac{n^2y}{bf^2}}dy +$

u e

$u e^{\frac{n^2 y}{bf^2}} du - \frac{(c-y)}{b} e^{\frac{n^2 y}{bf^2}} dy = 0$. Presentemente è manifesto, che l' integrale di questa equazione è $\frac{1}{2}u^2 e^{\frac{n^2 y}{bf^2}} - \int \frac{(c-y)}{b} e^{\frac{n^2 y}{bf^2}} dy +$ Cost. $= 0$. Parimente $-\int \frac{c}{b} e^{\frac{n^2 y}{bf^2}} dy = -\frac{cf^2}{n^2} e^{\frac{n^2 y}{bf^2}}$, ed inoltre $\int \frac{y}{b} e^{\frac{n^2 y}{bf^2}} dy = \frac{f^2 y}{n^2} e^{\frac{n^2 y}{bf^2}} - \int \frac{f^2}{n^2} e^{\frac{n^2 y}{bf^2}} dy = \frac{f^2 y}{n^2} e^{\frac{n^2 y}{bf^2}} - \frac{bf^4}{n^4} e^{\frac{n^2 y}{bf^2}}$. Dunque si avrà $\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{f^2 y}{n^2} - \frac{cf^2}{n^2} - \frac{bf^4}{n^4}\right) e^{\frac{n^2 y}{bf^2}} +$ Cost. $= 0$. Per determinar la costante si ponga mente, che svanisce u quando $\lambda = b$, cioè $y = 0$: onde risulta Cost. $= \frac{cf^2}{n^2} + \frac{bf^4}{n^4}$; e finalmente nasce $\frac{1}{2}u^2 = \frac{bf^4}{n^4} + \frac{cf^2}{n^2} - \frac{f^2 y}{n^2} -$

C

$\left(\frac{cf^2}{n^2} + \frac{bf^4}{n^4}\right)e^{-\frac{n^2y}{bf^2}}$. Da questa equazione si può passare a quella del Corollario precedente, se (come ivi) si suppone $\frac{c}{b}$, $\frac{y}{b}$ essere quantità picciolissime tanto in confronto dell' unità, che in paragone di $\frac{f^2}{n^2}$. Imperciocchè essendo in tal ipotesi $\frac{n^2y}{bf^2}$ un numero assai picciolo, se si butta in serie l'esponenziale $e^{-\frac{n^2y}{bf^2}}$, si trova $1 - \frac{n^2y}{bf^2} + \frac{n^4y^2}{2b^2f^4} - \frac{n^6y^3}{2.3b^3f^6} +$ ec., della quale basta prendere i tre primi termini; onde fattane la sostituzione nella predetta equazione se ne inferisce $\frac{1}{2}u^2 = -\frac{f^2y}{n^2} - \left(\frac{cf^2}{n^2} + \frac{bf^4}{n^4}\right) \times \left(-\frac{n^2y}{bf^2} + \frac{n^4y^2}{2b^2f^4}\right) = -\frac{f^2y}{n^2} + \frac{cy}{b} - \frac{n^2cy^2}{2b^2f^2} + \frac{f^2y}{n^2} - \frac{y^2}{2b} = \frac{2cy - y^2}{2b}$, appunto come sopra, disprezzando il termine $\frac{n^2cy^2}{2b^2f^2}$, che contiene un prodotto di tre dimensioni delle grandezze picciolissime c, ed y. 230.

230. Si arriva poi all' equazione del Corollario I. se si assume $\frac{n^2}{f^2}$ immensamente maggiore di $\frac{b}{y}$, o $\frac{b}{c}$: imperciocchè allora il termine esponenziale $e^{-\frac{n^2 y}{bf^2}}$ diviene $= 0$, e parimente $\frac{bf^4}{n^4} = 0$; sicchè resta $\frac{1}{2}u^2 = \frac{f^2}{n^2}(c - y) = \frac{f^2}{n^2}(b - \lambda)$, vale a dire $\frac{1}{2}v^2 = b - \lambda$, cioè la velocità dell' uscita è dovuta all' altezza dell' acqua interna sopra l' esterna.

Ma nè l' una, nè l' altra di queste formole $\frac{1}{2}u^2 = \frac{2cy - y^2}{2b}$, $\frac{1}{2}u^2 = \frac{f^2}{n^2}(b - \lambda)$ può aver luogo senza un notabile errore tutte le volte che $\frac{n^2 y}{bf^2}$ è un numero mediocre, vale a dire nè immensamente grande, nè oltremodo picciolo, ed è nel tempo stesso così $\frac{n^2}{f^2}$ come $\frac{b}{y}$ un numero grande all' estremo.

Se per cagion d' esempio la parte esterna del cilindro sommerso è di un pollice, cioè $c = 1$, e la parte sommessa di 80 pollici, ossia $a = 80$, $b = 81$, e si assume il diametro del tubo

tubo triplo di quello del foro, e però $\frac{n^2}{f^2} = 81$; l'equazione $\frac{1}{2}u^2 = \frac{bf^4}{n^4} + \frac{cf^2}{n^2} - \frac{f^2y}{n^2} - \left(\frac{cf^2}{n^2} + \frac{bf^4}{n^4}\right)e^{-\frac{n^2y}{bf^2}} = \frac{f^2}{n^2} \times \left(\frac{bf^2}{n^2} + c - y\right) - \frac{f^2}{n^2}\left(c + \frac{bf^2}{n^2}\right)e^{-\frac{n^2y}{bf^2}}$ diventa $\frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{81}(2 - y) - \frac{2}{81}e^{-y} = \frac{2 - y - 2e^{-y}}{81}$. Quindi per conoscere la velocità dell' acqua allorchè l'interna è discesa al livello dell' esterna fatto $y = c = 1$ apparisce $\frac{1}{2}u^2 = \frac{1 - 2e^{-1}}{81} = \frac{e - 2}{81\,e} = \frac{2{,}71828 - 2}{81 \cdot 2{,}71828} = \frac{0{,}71828}{220{,}18068} = 0{,}00325 = \frac{1}{308}$ di un pollice: laddove per l'opposto l'equazione $\frac{1}{2}u^2 = \frac{2cy - y^2}{2b}$ ci avrebbe dato $\frac{1}{162}$ di un pollice, e l'altra $\frac{1}{2}u^2 = \frac{f^2}{n^2}(c - y)$ ci avrebbe fatto credere nulla una tale velocità.

In questo stesso esempio si troverà lo spazio intero, che l'acqua interna del vaso som-

merso può percorrere discendendo con porre $\frac{1}{2}u^2 = 0$, il che somminiſtra $y = 2 - \frac{2}{e^y}$;

ed a queſta equazione ſi soddisfa aſſumendo y un poco minore di $\frac{8}{5}$; e ciò dimoſtra, che la maſſima profondità, a cui l' acqua interna del vaso può discendere è un poco meno di $\frac{7}{5}$ d'un pollice sotto il livello dell'eſterna. Le altre due formole danno anche qui risultati differenti, e fra loro discordi. Per determinare in queſto esempio il luogo della maſſima velocità, differenzio l' equazione $\frac{1}{2}u^2 =$

$\frac{2 - y - 2e^{-y}}{81}$ mettendo $du = 0$, e conse-

guisco $- dy + 2e^{-y} dy = 0$; e quindi

$e^{-y} = \frac{1}{2}$, vale a dire $y = \log. 2 = 2,302585 . 0,30103 = 0,69314716255$. Dunque l' acqua del vaso acquiſta la maſſima velocità dopo aver trascorso $\frac{69}{100}$ circa d' un pollice.

PROBLEMA XXXVII.

231. *Determinare la velocità maſſima dell' acqua, che ſorte dall' apertura d' un vaſo cilindrico, o priſmatico retto verticalmente tuffato nell' acqua ſino ad una data profondità.*

So-

SOLUZIONE.

Nell' equazione $\frac{1}{2}v^2 = \frac{n^2 b}{n^2 - 2f^2} \times \left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{n^2}{f^2} - 1}\right) - \frac{n^2 \alpha}{n^2 - f^2} \times \left(1 - \left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{n^2}{f^2} - 1}\right)$ si faccia $\frac{\lambda}{b} = x$, ed $\frac{n^2 - f^2}{f^2} = m$, onde abbiasi $\frac{1}{2}v^2 = \frac{n^2 b}{n^2 - 2f^2}\left(x - x^m\right) - \frac{n^2 \alpha}{n^2 - f^2}\left(1 - x^m\right)$.

Prendendo ora il differenziale di questa equazione, ed uguagliandolo a zero, si genera $\frac{b}{n^2 - 2f^2}\left(1 - mx^{m-1}\right) + \frac{m\alpha x^{m-1}}{n^2 - f^2} = 0$, e però $\frac{b}{n^2 - 2f^2} = \left(\frac{mb}{n^2 - 2f^2} - \frac{m\alpha}{n^2 - f^2}\right) x^{m-1}$, e quindi $x^{m-1} = \frac{(n^2 - f^2)b}{(n^2 - f^2)mb - (n^2 - 2f^2)m\alpha}$ $= \frac{f^2 b}{(n^2 - f^2)b - (n^2 - 2f^2)\alpha}$; e finalmente $\lambda = b\left(\frac{f^2 b}{(n^2 - f^2)b - (n^2 - 2f^2)\alpha}\right)^{\frac{f^2}{n^2 - 2f^2}}$.

Dunque quando l' acqua interna del vaso sommerso sarà arrivata a questa altezza λ sopra il foro avrà acquistato la massima celerità nell' uscire dal foro. Sostituito questo valore di λ in quello di $\frac{1}{2}v^2$ si trova questo $=$

$$\frac{n^2 b(b-\alpha)}{(n^2-f^2)b-(n^2-2f^2)\alpha} \times \left(\frac{f^2 b}{(n^2-f^2)b-(n^2-2f^2)\alpha}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}} -$$

$$\frac{n^2\alpha}{n^2-f^2}\left(1-\left(\frac{f^2 b}{(n^2-f^2)b-(n^2-2f^2)\alpha}\right)^{\frac{n^2-f^2}{n^2-2f^2}}\right)$$

che è l' altezza dovuta alla massima celerità che si cercava. Il che era ec.

COROLLARIO I.

232. Supposto picciolissimo il foro in confronto dell' ampiezza del fondo cosicchè f^2, e $2f^2$ possano aversi per nulla in paragone di n^2, il valore di λ si cangia in

$b\left(\frac{f^2 b}{n^2(b-\alpha)}\right)^{\frac{f^2}{n^2}}$. Ora è altronde noto, che

la quantità $\left(\frac{f^2 b}{n^2(b-\alpha)}\right)^{\frac{f^2}{n^2}} = 1 - y$ essendo y una picciolissima quantità. Ma log.$(1-y)$ $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 -$ ec. $= -y$ trascurando le altre potestà. Dunque

$f^2 b$

$$\left(\frac{f^2 b}{n^2(b-\alpha)}\right)^{\frac{f^2}{n^2}} = 1 + \log.\left(\frac{f^2 b}{n^2(b-\alpha)}\right)^{\frac{f^2}{n^2}} =$$

$1 - \frac{f^2}{n^2}\log.\frac{n^2(b-\alpha)}{f^2 b}$; e perciò $\lambda =$ $b\left(1 - \frac{f^2}{n^2}\log.\frac{n^2(b-\alpha)}{f^2 b}\right)$; il che dimostra, che la velocità dell' acqua si fa massima appena abbassata ad una insensiibile profondità.

COROLLARIO II.

233. Per conoscere in questa ipotesi l'altezza dovuta alla massima celerità, io scrivo il suo valore così, $\frac{1}{2}v^2 = \frac{n^2 b(b-\alpha)}{(n^2-f^2)b-(n^2-2f^2)\alpha} \times$

$$\left(\frac{f^2 b}{(n^2-f^2)b-(n^2-2f^2)\alpha}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}} -$$

$$\frac{n^2\alpha}{n^2-f^2}\left(1 - \frac{f^2 b}{(n^2-f^2)b-(n^2-2f^2)\alpha} \times \right.$$

$$\left.\left(\frac{f^2 b}{(n^2-f^2)b-(n^2-2f^2)\alpha}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}}\right)$$, il quale in questo supposto si cangia in $b\left(\frac{f^2 b}{n^2(b-\alpha)}\right)^{\frac{f^2}{n^2}}$

Cc 3 —

$$- \alpha \left(1 - \frac{f^2 b}{n^2(b-\alpha)} \left(\frac{f^2 b}{n^2(b-\alpha)} \right)^{\frac{f^2}{n^2}} \right)$$

$$= b\left(1 + \frac{f^2}{n^2} \log. \frac{f^2 b}{n^2(b-\alpha)} \right) -$$

$$\alpha\left(1 - \frac{f^2 b}{n^2(b-\alpha)} \left(1 + \frac{f^2}{n^2} \log. \frac{f^2 b}{n^2(b-\alpha)} \right) \right)$$

$$= (b-\alpha)\left(1 + \frac{f^2}{n^2} \log. \frac{f^2 b}{n^2(b-\alpha)} \right)$$

$$= (b-\alpha)\left(1 - \frac{f^2}{n^2} \log. \frac{n^2(b-\alpha)}{f^2 b} \right).$$

Da ciò si scorge, che l'altezza dovuta alla celerità massima non differisce se non insensibilmente dall'altezza dell'acqua del vaso nel principio del moto sopra l'acqua esterna stagnante.

PROBLEMA XXXVIII.

Fig. 29. 234. *Nel tubo* APFB (Fig. 29) *supposto ora della stessa larghezza circolare dappertutto, ma comunque incurvato, ed immerso in una conserva d'acqua sino alla profondità* GL $= \alpha$, *si domanda la velocità dell'acqua dentro il vaso dopo che ne sarà uscita una porzione contenuta in una data capacità* AKVB.

SOLUZIONE.

Richiamo qui l'equazione del Problema XXXV.

$$b - \alpha - \omega - \frac{n^2 u^2}{2 f^2} + \frac{n^2 u^2}{2 q^2} + \frac{n^2 u du}{q dr} \times$$

$$\int$$

$\int\frac{ds}{z} = 0$, e faccio nella presente ipotesi $z = q = n$, $\int\frac{ds}{z} = \frac{s-\Delta}{n}$, dove dovendosi porre r in luogo di s, nasce $\int\frac{ds}{z} = \frac{r-\Delta}{n}$. Dunque fatte queste sostituzioni, l'equazione si trasforma in $b-\alpha-\omega-\frac{n^2u^2}{2f^2}+\frac{1}{2}u^2+\frac{nudu}{dr}\left(\frac{r-\Delta}{n}\right) = 0$, cioè in $2(b-\alpha-\omega)dr+\left(1-\frac{n^2}{f^2}\right)u^2dr + 2udu(r-\Delta) = 0$. Prendo $\psi = \Delta - r$, $d\psi = -dr$, ed ottengo $2\psi udu+\left(1-\frac{n^2}{f^2}\right)u^2d\psi + 2(b-\alpha-\omega)d\psi = 0$; e moltiplicando questa equazione per $\psi^{-\frac{n^2}{f^2}}$ ne ricavo $2\psi^{1-\frac{n^2}{f^2}}udu + \left(1-\frac{n^2}{f^2}\right)u^2\psi^{-\frac{n^2}{f^2}}d\psi + 2(b-\alpha-\omega)\times \psi^{-\frac{n^2}{f^2}}d\psi = 0$. Ora è visibile, che l'integrale di questa equazione è $u^2\psi^{1-\frac{n^2}{f^2}} + \int 2(b-\alpha-\omega)\psi^{-\frac{n^2}{f^2}}d\psi + \text{Cost.} = 0$. Sic-

come pertanto per la forma nota del tubo l'ascissa $I\gamma = \omega$ dee potersi esprimere per una funzione di $Ii = r = \Delta - \psi$, perciò la sommatoria $\int 2(b - \alpha - \omega)\psi^{-\frac{n^2}{f^2}} d\psi$ potrà sempre ottenersi col calcolo integrale, e quindi conoscersi la u, che si cerca. Il che era ec.

COROLLARIO I.

235. Se il tubo è un cilindro retto inclinato all' orizzonte sotto l'angolo $IEG = \varphi$ (Fig. 31.), ed è $Ii = r$, $I\gamma = \omega$, $IG = b$, $iE = \Delta - r = \psi$, $\gamma G = iQ = b - \omega = \lambda = \psi$ sen. φ, l'equazione ritrovata diventa

$$u^2\psi^{1-\frac{n^2}{f^2}} + \int 2(\psi \text{ sen. } \varphi - \alpha)\psi^{-\frac{n^2}{f^2}} d\psi$$

$+$ Cost. $= 0$; ovvero $u^2\psi^{1-\frac{n^2}{f^2}} +$

$$\frac{2f^2}{2f^2 - n^2}\psi^{2-\frac{n^2}{f^2}} \text{sen. } \varphi - \frac{2f^2\alpha\,\psi^{1-\frac{n^2}{f^2}}}{f^2 - n^2} +$$

Cost. $= 0$. Ma u è $= 0$, quando $\psi = \Delta$: dunque

$$\text{Cost.} = \frac{2f^2\alpha\Delta^{1-\frac{n^2}{f^2}}}{f^2 - n^2} - \frac{2f^2\Delta^{2-\frac{n^2}{f^2}} \text{ sen. } \varphi}{2f^2 - n^2};$$ e

quin-

quindi $u^2 = \frac{2f^2 \Delta \text{ sen. } \varphi}{n^2 - 2f^2} \left(\frac{\psi}{\Delta} - \left(\frac{\Delta}{\psi} \right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} \right)$

$- \frac{2f^2 \alpha}{n^2 - f^2} \left(1 - \left(\frac{\Delta}{\psi} \right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} \right)$. Ora essendo

Δ sen. $\varphi = b$, e $\frac{\Delta}{\psi} = \frac{b}{b - \omega} = \frac{b}{\lambda}$, si deduce

ce $u^2 = \frac{2f^2 b}{n^2 - 2f^2} \left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{b}{\lambda} \right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} \right)$

$- \frac{2f^2 \alpha}{n^2 - f^2} \left(1 - \left(\frac{b}{\lambda} \right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} \right)$, e

$v^2 = \frac{2n^2 b}{n^2 - 2f^2} \left(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{b}{\lambda} \right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} \right)$

$- \frac{2n^2 \alpha}{n^2 - f^2} \left(1 - \left(\frac{b}{\lambda} \right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}} \right)$, che

sono espressioni perfettamente simili alle ritrovate nel Problema XXXVI. pe' vasi cilindrici verticali. Di qui deriva il seguente

TEOREMA XXII.

236. *Dati due vasi prismatici di uguali basi, e di luci parimente uguali, ma comunque differenti in lunghezza, de' quali uno sia verticale, l'altro*

l'altro inclinato all'orizzonte sotto qualunque angolo talmente però che l' altezza verticale IG *del vaso inclinato sia uguale a quella del vaso verticale, e sieno entrambi tuffati nell' acqua alla medesima profondità, la velocità dell' acqua, discesa che sia ad uguali profondità, è in entrambi la stessa.*

COROLLARIO II.

237. Essendo il valore di v^2 in questo caso lo stesso che il ritrovato nel Problema XXXVI. pe' vasi cilindrici verticali, è evidente, che tutti i nove Corollarj di quel Problema, siccome pure il Problema XXXVII. co' suoi due corollarj si verificheranno anche ne' vasi cilindrici inclinati.

PROBLEMA XXXIX.

238. *Ritrovare il tempo t, che mette l' acqua in un vaso cilindrico comunque inclinato all'orizzonte, ed immerso nell' acqua stagnante a discendere verticalmente d' un dato spazio dentro il vaso, supposto picciolissimo il lume in confronto del fondo.*

SOLUZIONE.

Essendosi trovato $u^2 = \frac{2f^2b}{n^2-2f^2}\Big(\frac{\lambda}{b} - \left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}}\Big) - \frac{2f^2a}{n^2-f^2}\Big(1 - \left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}}\Big)$, e supponendosi qui f picciolissimo in paragone di

n,

n, egli è manifesto, che potrà aversi per nulla la quantità $\left(\frac{b}{\lambda}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}}$, cioè $\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{\frac{n^2}{f^2}-1}$, giacchè una frazione elevata ad un' altissima potestà diviene estremamente picciola. Sarà dunque $u^2 = \frac{2f^2\lambda}{n^2-2f^2} - \frac{2f^2\alpha}{n^2-f^2} = \frac{2f^2}{n^2}(\lambda-\alpha)$, ed $u = \frac{f}{n} \times \sqrt{2(\lambda-\alpha)}$. Ora è noto, che $dt = \frac{dr}{u} = -\frac{d\psi}{u} = -\frac{d\lambda}{u\,\text{sen.}\,\varphi} = -\frac{n\,d\lambda}{f\,\text{sen.}\varphi\sqrt{2(\lambda-\alpha)}}$: perciò integrata questa equazione, si ricava $t = -\frac{n\sqrt{2(\lambda-\alpha)}}{f\,\text{sen.}\,\varphi} + \text{Cost.}$; e perchè t si annulla quando $\lambda = b$, cioè nel principio del moto, risulta $t = \frac{n}{f\,\text{sen.}\,\varphi}\left(\sqrt{2(b-\alpha)} - \sqrt{2(\lambda-\alpha)}\right)$. Il che era ec.

COROLLARIO I.

239. Se in questa espressione del tempo si fa $\lambda = o$, essa diventa immaginaria, e dimostra essere impossibile, che il vaso interamente si vuoti. Che se si assume $\lambda = \alpha$, si viene a conoscere il

il tempo della discesa sino all' livello dell' acqua esterna stagnante, e si acquista $t = \frac{n}{f \text{ sen. } \varphi} \times \sqrt{2(b - \alpha)}$.

COROLLARIO II.

240. Supposto $\varphi = 90^{\circ}$, il valore di t diviene $\frac{n}{f}\left(\sqrt{2(b - \alpha)} - \sqrt{2(\lambda - \alpha)}\right)$; donde si trae il

TEOREMA XXIII.

241. *Se sieno dati due vasi cilindrici, uno verticale, l' altro inclinato, ambedue di ugual larghezza, e di luci picciolissime uguali, e l' altezza del vaso verticale sia uguale all' altezza verticale dell' inclinato, e siano entrambi immersi ad uguali profondità nell' acqua stagnante, sta il tempo della discesa dell' acqua per una data altezza verticale nel vaso inclinato al tempo della discesa per la stessa altezza nel vaso verticale, come sta il seno tutto al seno dell' angolo d' inclinazione.*

PROBLEMA XL.

242. *Supposto tutto come nel Problema antecedente, ritrovare il tempo, in cui l' acqua acquista la massima celerità.*

SOLUZIONE.

Pel Cor. I. del Problema XXXVII. la velocità

cità, con cui l'acqua sbocca dalla luce del vaſo, ſi fa maſſima, quando $\lambda = b\left(1 - \frac{f^2}{n^2} \times \log. \frac{n^2(b-\alpha)}{f^2 b}\right)$. Perlocchè ſoſtituito queſto valore in quello di $t = \frac{n}{f \text{ ſen. } \varphi}\left(\sqrt{2(b-\alpha)} - \sqrt{2(\lambda-\alpha)}\right)$, ſi ottiene $t = \frac{n}{f \text{ ſen. } \varphi} \times \sqrt{2(b-\alpha)} - \frac{n}{f \text{ ſen. } \varphi}\sqrt{\left(2b - 2\alpha - \frac{2bf^2}{n^2} \log. \frac{n^2(b-\alpha)}{f^2 b}\right)}$. Siccome pertanto il radicale $\sqrt{\left(2b - 2\alpha - \frac{2bf^2}{n^2}\log. \frac{n^2(b-\alpha)}{f^2 b}\right)}$, per eſſere piccioliſſimo il termine logaritmico, è aſſai proſſimamente $= \sqrt{(2b - 2\alpha)} - \frac{bf^2}{n^2\sqrt{(2b-2\alpha)}} \log. \frac{n^2(b-\alpha)}{f^2 b}$; quindi naſce $t = \frac{bf}{n \text{ ſen. } \varphi \sqrt{(2b-2\alpha)}} \log. \frac{n^2(b-\alpha)}{f^2 b}$. Il che era ec.

COROLLARIO.

243. L' acqua acquiſta la maſſima celerità quando ſi è abbaſſata nel vaſo della quantità $b - \lambda = \frac{bf^2}{n^2} \log. \frac{n^2(b-\alpha)}{f^2 b}$. Il perchè moltiplicando queſt' abbaſſamento per l' ampiezza n del vaſo ſi viene a conoſcere il volume d' acqua

bf^2

$\frac{bf^2}{n}$ log. $\frac{n^2(b-\alpha)}{f^2 b}$ che il vaſo dee verſare prima di giugnere alla maſſima celerità.

PROBLEMA XLI.

Fig. 32. 244. *Sia dato il tubo* APFB (*Fig.* 32.) *della ſteſſa larghezza circolare dappertutto, il quale inferiormente al piano orizzontale* GE, *che paſſa pel centro del lume, ſia comunque incurvato, e ſuperiormente a detto piano, cioè nella parte* NI *ſia diritto, ed inclinato all' orizzonte ſotto un dato angolo* φ; *e ſia inoltre immerſo nell' acqua ſtagnante fino ad una data profondità* α *del centro* E *del lume ſotto il pian di livello: ſi domanda la velocità dell' acqua nel tubo dopo che ne ſarà uſcita pel foro una data quantità.*

SOLUZIONE.

Si ſupponga, che l' acqua nel tubo ſi ſia abbaſſata in KV, e che ſia come prima $INE = \Delta$, $IG = b$, $iE = \psi$, $\gamma G = b - \omega = \lambda$: e fatto $EDN = \theta$, ſarà $iN = \psi - \theta$; e però $b - \omega = (\psi - \theta)$ ſen. φ. Surrogato pertanto queſto valore nell' equazione del Problema XXXVIII. $u\,\psi^{1-\frac{n^2}{f^2}} + \int 2(b-\omega-\alpha)\psi^{-\frac{n^2}{f^2}} d\psi +$ Coſt. $= o$ ſi

si ritrae $u^2\psi^{1-\frac{n^2}{f^2}} + \int 2\left((\psi-\theta)\,\text{sen.}\varphi - \alpha\right) \times \psi^{-\frac{n^2}{f^2}} d\psi + \text{Cost.} = o$, cioè $u^2\psi^{1-\frac{n^2}{f^2}}$ $+ \frac{2f^2\psi^{2-\frac{n^2}{f^2}}\,\text{sen.}\,\varphi}{2f^2 - n^2} - \frac{2\theta f^2\psi^{1-\frac{n^2}{f^2}}\,\text{sen.}\,\varphi}{f^2 - n^2}$ $- \frac{2\alpha f^2\psi^{1-\frac{n^2}{f^2}}}{f^2 - n^2} + \text{Cost.} = o$. Ma nel principio del moto si annulla u, e ψ diventa Δ; dunque Cost. $= \frac{2\theta f^2\Delta^{1-\frac{n^2}{f^2}}\,\text{sen.}\,\varphi}{f^2 - n^2}$ $+ \frac{2\alpha f^2\Delta^{1-\frac{n^2}{f^2}}}{f^2 - n^2} - \frac{2f^2\Delta^{2-\frac{n^2}{f^2}}\,\text{sen.}\,\varphi}{2f^2 - n^2}$. Il perchè $u^2 = \frac{2f^2\,\text{sen.}\,\varphi}{n^2 - 2f^2}\psi - \frac{2\theta f^2\,\text{sen.}\,\varphi}{n^2 - f^2} -$ $\frac{2\alpha f^2}{n^2 - f^2} - \frac{2f^2\,\text{sen.}\,\varphi}{n^2 - 2f^2}\psi\left(\frac{\Delta}{\psi}\right)^{2-\frac{n^2}{f^2}} +$

2θ

$$\frac{2\theta f^2 \text{ fen.}\varphi}{n^2 - f^2}\left(\frac{\Delta}{\psi}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}} + \frac{2\alpha f^2}{n^2 - f^2}\left(\frac{\Delta}{\psi}\right)^{1-\frac{n^2}{f^2}}$$

$$= \frac{2f^2\psi \text{ fen.}\varphi}{n^2 - 2f^2}\left(1 - \left(\frac{\psi}{\Delta}\right)^{\frac{n^2}{f^2}-2}\right) - \frac{2f^2}{n^2 - f^2} \times$$

$$\left((\alpha + \theta \text{ fen.}\varphi)\left(1 - \left(\frac{\psi}{\Delta}\right)^{\frac{n^2}{f^2}-1}\right)\right).$$ Il che era ec.

COROLLARIO I.

245. Se si suppone $n = f$, la seconda parte del valore di u^2 si cangia in $\frac{0}{0}$, valore indeterminato, che ci avverte di tornar indietro all'equazione differenziale del Problema XXXVIII. $2\psi u du + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right)u^2 d\psi + 2(b - \alpha - \omega)d\psi = 0$, la quale, essendo $n = f$, e $(\psi - \theta)$ fen.$\varphi = b - \omega$, si cangia in $2\psi u du + 2[\text{fen.}\varphi(\psi - \theta) - \alpha]d\psi = 0$; donde deriva $2udu = 2(\theta \text{ fen.}\varphi + \alpha)\frac{d\psi}{\psi} - 2d\psi \text{ fen.}\varphi$; ed integrando $u^2 = (2\theta \text{ fen.}\varphi + \alpha) \times \log.\psi - 2\psi \text{ fen.}\varphi + \text{Cost.} = (2\theta \text{ fen.}\varphi + \alpha) \times \log.\frac{\psi}{\Delta} + 2 \text{ fen.}\phi(\Delta - \psi)$.

COROLLARIO II.

246. Si determina in questa ipotesi di $f = u$ la massima celerità, se nell'equazione differenziale

ziale $2\psi u du + 2[\text{sen.}\,\varphi(\psi-\theta)-\alpha]d\psi=0$ si assume $du=0$, che da $(\psi-\theta)\,\text{sen.}\,\varphi=\alpha$, cioè $G\gamma=\alpha$; e ciò fa conoscere, che la velocità diventa massima allorchè l' acqua nel tubo si è abbassata al livello dell' esterna stagnante.

COROLLARIO III.

247. L' equazione $u^2=(2\theta\,\text{sen.}\,\varphi+\alpha)\times$ $\log.\frac{\psi}{\Delta}+2\,\text{sen.}\,\varphi(\Delta-\psi)$ ci scuopre la massima profondità, a cui l' acqua può discendere dentro il tubo; imperciocchè facendo $u^2=0$ risulta tanto $\psi=\Delta$, che vale pel principio del moto, quanto $2\,\text{sen.}\,\varphi(\Delta-\psi)=$ $(2\theta\,\text{sen.}\,\varphi+\alpha)\log.\frac{\Delta}{\psi}$, da cui si avrà il valore di ψ, e da questo si conoscerà il massimo abbassamento dell' acqua.

COROLLARIO IV.

248. Qualora sia $n^2=2f^2$, diventa $\frac{0}{0}$ il primo termine del valore di u^2 nell' equazione del Problema. Laonde è d' uopo riprendere l' equazione differenziale $2\psi u du+\left(1-\frac{n^2}{f^2}\right)\times$ $u^2 d\psi+2(b-\alpha-\omega)d\psi=0$, ed in essa sostituire per $b-\omega$ il suo equivalente $(\psi-\theta)\times$ sen. φ, e 2 per $\frac{n^2}{f^2}$; dal che risulta $2\psi u du-$ $u^2 d\psi+2[\text{sen.}\,\varphi(\psi-\theta)-\alpha]d\psi=0$, e di-

dividendo per ψ^2 nasce $\frac{2\psi u du - u^2 d\psi}{\psi^2} +$ $2[\text{sen.}\,\varphi(\psi - \theta) - \alpha]\,\frac{d\psi}{\psi^2} = 0$. Ora l' integrale di questa equazione è $\frac{u^2}{\psi} + \frac{2\alpha}{\psi} +$ $\frac{2\theta\,\text{sen.}\,\varphi}{\psi} + 2\,\text{sen.}\,\varphi\,\log.\,\psi + \text{Cost.} = 0$; e però $\frac{u^2}{\psi} = \frac{2\alpha + 2\theta\,\text{sen.}\,\varphi}{\Delta} - \frac{2\alpha - 2\theta\,\text{sen.}\,\varphi}{\psi} +$ $2\,\text{sen.}\,\varphi\,\log.\,\frac{\Delta}{\psi}$, vale a dire $u^2 = 2(\theta\,\text{sen.}\,\varphi + \alpha)\times$ $\left(\frac{\psi}{\Delta} - 1\right) + 2\psi\,\text{sen.}\,\varphi\,\log.\,\frac{\Delta}{\psi}$.

COROLLARIO V.

249. Per conoscere in questo caso la massima celerità dell' acqua faccio $du = 0$ nell' equazione differenziale del Corollario precedente, e trovo $u^2 = 2\,\text{sen.}\,\varphi\,(\psi - \theta) - 2\alpha$; e quindi $2\,\text{sen.}\,\varphi(\psi - \theta) - 2\alpha =$ $2(\theta\,\text{sen.}\,\varphi + \alpha)\left(\frac{\psi}{\Delta} - 1\right) + 2\psi\,\text{sen.}\,\varphi\,\log.\,\frac{\Delta}{\psi}$, vale a dire $2\psi\,\text{sen.}\,\varphi - 2(\theta\,\text{sen.}\,\varphi + \alpha)\frac{\psi}{\Delta}$ $= 2\psi\,\text{sen.}\,\varphi\,\log.\,\frac{\Delta}{\psi}$, ovvero $\log.\,\frac{\Delta}{\psi} =$ $\frac{\Delta - \theta}{\Delta} - \frac{\alpha}{\Delta\,\text{sen.}\,\varphi} = \frac{\text{sen.}\,\varphi\,(\Delta - \theta) - \alpha}{\Delta\,\text{sen.}\,\varphi}$.

La-

Laonde preso e pel numero, che ha per suo logaritmo iperbolico l' unità, apparisce

$$\psi = \Delta\, e^{\frac{\alpha - \text{sen.}\,\varphi\,(\Delta - \theta)}{\Delta\,\text{sen.}\,\varphi}}$$

; dal che si fa noto il luogo del tubo, dove pervenuta che sia l' acqua nel discendere fa acquisto della massima celerità.

COROLLARIO VI.

250. Se in questa stessa ipotesi di $n^2 = 2f^2$ si fa $u^2 = o$, dall' equazione del Corollario IV. si ricava tanto $\psi = \Delta$ pel principio del moto, quanto $(\theta\,\text{sen.}\,\varphi + \alpha) \times \left(1 - \frac{\psi}{\Delta}\right) = \psi\,\text{sen.}\,\varphi\,\log.\,\frac{\Delta}{\psi}$; e la radice ψ di questa equazione trascendente farà conoscere fino a qual luogo del tubo l' acqua discenderà senza poter andare più oltre.

PROBLEMA XLII.

251. *Supposto il tubo* APFB (Fig. 29) *di qualunque forma immerso nell' acqua stagnante alla profondità* α *sotto il pian di livello, e mantenuto costantemente pieno fino in* AB; *si cerca la velocità dell' acqua dopo che tanta ne sarà sortita dall' apertura* PF *quanta contenevasi nello spazio* AKVB.

Fig. 29.

SOLUZIONE.

Nel Problema XXXV. si è ottenuta l'equazione $b - \alpha - \omega - \frac{n^2u^2}{2f^2} + \frac{n^2u^2}{2q^2} + \frac{n^2udu}{qdr}\int\frac{ds}{z} = 0$, nella quale convien sostituire $AB = h$ in luogo di $q = KV$, e fare $\omega = 0$; e l'integrale $\int\frac{ds}{z}$ pel caso, in cui ora siamo del vaso mantenuto costantemente pieno, dee pigliarsi in modo, che si annulli quando $s = ICE = \Delta$, e che poscia nella sua espressione si ponga $s = 0$, $z = AB = h$: donde si fa chiaro che $\int\frac{ds}{z}$ diverrà in questa ipotesi una grandezza costante, che chiameremo M. Siccome pertanto abbiamo $u^2 = \frac{f^2v^2}{a^2}$; e nominando λ la lunghezza del prisma d'acqua uscito dal foro, ed uguale al volume contenuto nello spazio $AKVB$, ritroviamo $fd\lambda = KkvV = qdr$; perciò sostituiti questi valori nella precedente equazione, ella si cangia in $2(b - \alpha)h^2d\lambda - h^2v^2d\lambda + f^2v^2d\lambda + 2fh^2Mvdv = 0$. Di qui si ritrae $d\lambda = -\frac{2fh^2Mvdv}{2h^2(b-\alpha)-(h^2-f^2)v^2}$, e per l'integrazione risulta $\lambda = \frac{fh^2M}{h^2-f^2} \times$ log.

log. $[2h^2(b-\alpha)-(h^2-f^2)v^2]$ $+$ Coſt. Siccome poi λ, e v ſi annullano inſieme, naſce Coſt. $=-\frac{fh^2M}{h^2-f^2}$ log. $2h^2(b-\alpha)$; e quindi $\lambda=\frac{fh^2M}{h^2-f^2}$ log. $\frac{2h^2(b-\alpha)-(h^2-f^2)v^2}{2h^2(b-\alpha)}$, ovvero $\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}=$ log. $\frac{2h^2(b-\alpha)-(h^2-f^2)v^2}{2h^2(b-\alpha)}$. Dunque paſſando da' numeri a' logaritmi ſi acquiſta $e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}=\frac{2h^2(b-\alpha)-(h^2-f^2)v^2}{2h^2(b-\alpha)}$; vale a dire $v^2=\frac{2h^2(b-\alpha)}{h^2-f^2}\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)$. Dunque ſi avrà la relazione fra la velocità dell' acqua uſcente dall' apertura PF, e la lunghezza del priſma, che ſi slancia da PF nel tempo che ſi ſmaltiſce l'acqua contenuta nel dato ſpazio $AKVB$. Il che era ec.

COROLLARIO I.

252. La maniera, colla quale viene determinato l' integrale M, moſtra aſſai chiaro, che queſt' integrale è ordinariamente una quantità negativa; e quindi ſi fa manifeſto, che il termine traſcendente $e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}$ tanto più s'impic-

picciolifce quanto più crefce λ; ond'è, che ogni qual volta poffa difprezzarfi f^2 in paragone di h^2, e il detto termine divenga $e^{\frac{\lambda}{fM}}$, potrà quefto averfi per nulla a motivo dell'efponente negativo grandiffimo $\frac{\lambda}{fM}$. Così otterremo $v^2 = \frac{2h^2(b-a)}{h^2-f^2}$, che è appunto il Teorema XIX.

Siccome poi non fi può in pratica all'acqua, che corre in AB a rifarcire il difpendio di quella che efce pel foro, imprimere la velocità $\frac{fv}{h}$, quale appunto efigerebbe la Teoria; ma fi fa effa per l'oppofto accorrere dolcemente e fenza impeto in direzione della fezione AB, onde la fua velocità è affatto nulla nella direzione della linea centrale; quindi è, che volendofi far fervire il calcolo a queft' ipotefi ordinaria farà efpediente fiffare $\frac{fv}{h}$, ovvero $\frac{f^2v^2}{h^2} = 0$. Allora l'equazione differenziale $d\lambda = -\frac{2fh^2Mvdv}{2h^2(b-a)-(h^2-f^2)v^2}$ $= -\frac{2fMvdv}{2(b-a)-\left(1-\frac{f^2}{h^2}\right)v^2}$ diventa

$d\lambda$

$d\lambda = -\frac{2fMvdv}{2(b-\alpha)-v^2}$, ed integrando $\lambda = fM \log. \frac{2(b-\alpha)-v^2}{2(b-\alpha)}$; donde acquistiamo $v^2 = 2(b-\alpha)\left(1-e^{\frac{\lambda}{fM}}\right)$.

COROLLARIO II.

253. Se il tubo fosse di larghezza uniforme, l' integrale M sarebbe $= \frac{s-\Delta}{h}$, essendo Δ tutta la linea centrale, e z la larghezza uniforme $= h$. Perciò fatto $s = 0$, come conviene, risulta $M = -\frac{\Delta}{h}$; e di qui

$$v^2 = \frac{2h^2(b-\alpha)}{h^2-f^2}\left(1-e^{\frac{-(h^2-f^2)\lambda}{fh\Delta}}\right).$$

Per l' altro caso ordinario dell' acqua che lateralmente accorre in AB senza avere alcuna velocità nella direzione della linea centrale Ii, si trova $v^2 = 2(b-\alpha)\left(1-e^{\frac{-h\lambda}{f\Delta}}\right)$.

COROLLARIO III.

254. Se ne' due valori di v^2 ritrovati nel Corollario precedente si sostituisce b in luogo

 di

di Δ, è manifesto, che si avrà la velocità dell' uscita dal foro ne' vasi cilindrici verticali.

PROBLEMA XLIII.

255. *Fatte le stesse ipotesi del Problema antecedente, ritrovare il tempo* t, *in cui l' acqua uscente dall' apertura del tubo acquista una data velocità.*

SOLUZIONE.

Essendo $dt = \frac{d\lambda}{v}$, e $d\lambda$ pel Problema antecedente $= -\frac{2fh^2Mvdv}{2h^2(b-\alpha)-(h^2-f^2)v^2}$, ne viene $dt = -\frac{2fh^2Mdv}{2h^2(b-\alpha)-(h^2-f^2)v^2} =$

$$-\frac{fhMdv}{[\sqrt{2h^2(b-\alpha)}+v\sqrt{(h^2-f^2)}]\sqrt{(2b-2\alpha)}}$$
$$-\frac{fhMdv}{[\sqrt{2h^2(b-\alpha)}-v\sqrt{(h^2-f^2)}]\sqrt{(2b-2\alpha)}}.$$

Laonde preso l' integrale sarà $t =$

$$\frac{fhM}{\sqrt{(2b-2\alpha)}\sqrt{(h^2-f^2)}} \times$$
$$\log.\frac{\sqrt{2h^2(b-\alpha)}-v\sqrt{(h^2-f^2)}}{\sqrt{2h^2(b-\alpha)}+v\sqrt{(h^2-f^2)}} + \text{Cost.}$$

E perchè debbono annullarsi insieme t, e v, la Cost. sarà $= 0$, e l' integrale sarà completo senza aggiunta di Costante. Il che era ec.

Co-

COROLLARIO I.

256. Se si suppone, che l' acqua che accorre lateralmente a riparare la perdita dell' effluente, non abbia alcuna velocità nella direzione della linea centrale, allora essendo $d\lambda = -\frac{2fMvdv}{2(b-\alpha)-v^2}$, diventa $dt = \frac{d\lambda}{v} = -\frac{2fMdv}{2(b-\alpha)-v^2} = -\frac{fMdv}{[\sqrt{(2b-2\alpha)}-v]\sqrt{(2b-2\alpha)}} - \frac{fMdv}{[\sqrt{(2b-2\alpha)}+v]\sqrt{(2b-2\alpha)}}$. Quindi integrando $t = \frac{fM}{\sqrt{(2b-2\alpha)}} \log. \frac{\sqrt{(2b-2\alpha)}-v}{\sqrt{(2b-2\alpha)}+v}$.

COROLLARIO II.

257. Supposto il tubo di larghezza uguale dappertutto, e però $M = -\frac{\Delta}{h}$, nasce

$$t = \frac{f\Delta}{\sqrt{(2b-2\alpha)}\sqrt{(h^2-f^2)}} \times \log. \frac{\sqrt{2h^2(b-\alpha)} + v\sqrt{(h^2-f^2)}}{\sqrt{2h^2(b-\alpha)} - v\sqrt{(h^2-f^2)}};$$

e pel caso della velocità nulla nella superficie suprema si ha $t = \frac{f\Delta}{h\sqrt{(2b-2\alpha)}} \times \log. \frac{\sqrt{(2b-2\alpha)}+v}{\sqrt{(2b-2\alpha)}-v}$.

Co-

COROLLARIO III.

258. Se il tubo è cilindrico verticale, e conseguentemente $M = -\frac{b}{h}$, risulta $t = \frac{fb}{\surd(2b - 2\alpha)\surd(h^2 - f^2)} \times$
$\log. \frac{\surd 2h^2(b-\alpha) + v\surd(h^2 - f^2)}{\surd 2h^2(b - \alpha) - v\surd(h^2 - f^2)}$;
e per l'altro caso $t = \frac{fb}{h\surd(2b - 2\alpha)} \times$
$\log. \frac{\surd(2b - 2\alpha) + v}{\surd(2b - 2\alpha) - v}$.

PROBLEMA XLIV.

259. *Dalla luce d'un tubo mantenuto costantemente pieno, ed immerso nell'acqua stagnante ad una data profondità α sorte un prisma d'acqua di data lunghezza λ: si domanda il tempo t trascorso.*

SOLUZIONE.

Nella formola $dt = \frac{d\lambda}{v}$ surrogato il valore di $v = \frac{h\surd 2(b-\alpha)}{\surd(h^2-f^2)}\left(1 - e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2 M}}\right)^{\frac{1}{2}}$, ritrovato nel Problema XLII., acquistiamo $dt =$
$d\lambda$

$$\frac{d\lambda \sqrt{(h^2-f^2)}}{h\sqrt{(2b-2\alpha)}\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}}.$$

Pongo ora $\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}=x$, e differenziando raccolgo $dx=-$

$$\frac{\frac{(h^2-f^2)}{2fh^2M}e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}d\lambda}{\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}},$$ cioè

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}}=\frac{-2fh^2Mdx}{(h^2-f^2)(1-x^2)}.$$

Perlocchè sarà $dt=\frac{-2fhMdx}{(2b-2\alpha)^{\frac{1}{2}}(h^2-f^2)^{\frac{1}{2}}(1-x^2)}$

$$=-\frac{fhM}{\sqrt{(2b-2\alpha)}\sqrt{(h^2-f^2)}}\times\frac{dx}{1-x}$$

$$-\frac{fhM}{\sqrt{(2b-2\alpha)}\sqrt{(h^2-f^2)}}\times\frac{dx}{1+x}.$$ Dunque

integrando si otterrà $t=\frac{fhM}{\sqrt{(2b-2\alpha)}\sqrt{(h^2-f^2)}}\times$

$\log.\frac{1-x}{1+x}+\text{Cost.}=\frac{fhM}{\sqrt{(2b-2\alpha)}\sqrt{(h^2-f^2)}}\times$

log.

$$\log. \frac{1-\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}}{1+\sqrt{\left(1-e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}}$$ senz'altra aggiunta di Costante, perchè si annullano insieme t, e λ. Il che era ec.

COROLLARIO.

260. Nel caso solito, che l'acqua di supplimento accorra lateralmente senza impeto, e non abbia velocità alcuna in direzione della linea centrale, onde $\frac{fv}{h}$ sia $= o$, basta sostituire nell'espressione ritrovata del tempo il valore di $h = \infty$; e si troverà $t = \frac{fM}{\sqrt{(2b-2a)}} \times$

$$\log. \frac{1-\sqrt{\left(1-e^{\frac{\lambda}{fM}}\right)}}{1+\sqrt{\left(1-e^{\frac{\lambda}{fM}}\right)}}.$$

PROBLEMA XLV.

261. *Ritrovare la quantità d'acqua, che sorte in un dato tempo dall'orifizio d'un vaso o tubo qualunque immerso col suo orifizio nell'acqua stagnante ad una data profondità.*

Se-

SOLUZIONE.

Posta, come dianzi, $= \lambda$ la lunghezza del prisma d'acqua, che nel tempo t sbocca dal lume f, sarà $f\lambda$ il corpo d'acqua che qui si cerca. Ma abbiamo veduto essere $t = \frac{fhM}{\sqrt{(2b-2\alpha)}\sqrt{(h^2-f^2)}} \times$

$$\log. \frac{1 - \sqrt{\left(1 - e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}}{1 + \sqrt{\left(1 - e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}}, \text{ ovvero}$$

$$\frac{t\sqrt{(2b-2\alpha)}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM} =$$

$$\log. \frac{1 - \sqrt{\left(1 - e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}}{1 + \sqrt{\left(1 - e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}}; \text{ perciò fatto}$$

$\frac{\sqrt{(2b-2\alpha)}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM} = A$, si ottiene

$$e^{At} = \frac{1 - \sqrt{\left(1 - e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}}{1 + \sqrt{\left(1 - e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right)}}; \text{ e}$$

quin-

quindi $V\left(1 - e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}}\right) = \frac{1-e^{At}}{1+e^{At}}$,

e quadrando $1 - e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}} = \frac{(1-e^{At})^2}{(1+e^{At})^2}$,

cioè $e^{\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M}} = \frac{(1+e^{At})^2-(1-e^{At})^2}{(1+e^{At})^2}$.

$\frac{4e^{At}}{(1+e^{At})^2}$. Paſſo ora dai numeri ai logaritmi, ed ottengo $\frac{(h^2-f^2)\lambda}{fh^2M} = At + \log. 4 - 2\log.(1+e^{At})$; e in conseguenza $\lambda = \frac{2fh^2M}{h^2-f^2}\left(\frac{1}{2}At + \log. 2 - \log.(1+e^{At})\right)$. Dunque il corpo d' acqua $f\lambda = \frac{2f^2h^2M}{h^2-f^2} \times \left(\frac{1}{2}At + \log. 2 - \log.(1+e^{At})\right)$. Il che era ec.

COROLLARIO I.

262. Pel caſo ordinario della velocità nulla nella ſuprema ſezione del vaſo aſſumo come pri-

prima $h = \infty$, e ritraggo $A = \frac{\surd(2b-2\alpha)}{fM}$, e il corpo d' acqua ricercato $f\lambda = 2f^2M \times$

$$\left(\frac{t\surd(2b-2\alpha)}{2fM} + \log.2 - \log.\left(1 + e^{\frac{t\surd(2b-2\alpha)}{fM}}\right)\right).$$

COROLLARIO II.

263. E' manifesto, che il numero At è grandissimo tutte le volte che non sia t affatto picciolo, e perchè l' integrale M è negativo, ne viene in conseguenza, che sarà e^{At} una quantità picciolissima e da disprezzarsi. Laonde avremo $f\lambda = \frac{fht\surd(2b-2\alpha)}{\surd(h^2-f^2)} + \frac{2f^2h^2M}{h^2-f^2} \times$ log. 2.

Nel caso della velocità nulla nella suprema sezione, si ottiene $f\lambda = ft\surd(2b-2\alpha) + 2f^2 M$ log. 2.

COROLLARIO III.

264. Se l' acqua nel primo istante del moto acquistasse la massima celerità $v = \frac{h\surd(2b-2\alpha)}{\surd(h^2-f^2)}$ (Problema XXXIV.), e con qaesta proseguisse uniformemente, sarebbe allora $\lambda = tv = \frac{th\surd(2b-2\alpha)}{\surd(h^2-f^2)}$; e perciò $f\lambda = \frac{fht\surd(2b-2\alpha)}{\surd(h^2-f^2)}$:

il

il che dà a divedere, che in questa ipotesi uscirebbe dall' apertura del tubo tanto più d' acqua di prima quanto è il valore della quantità $\frac{2f^2h^2M}{h^2-f^2} \times$ log. 2., la quale è negativa a motivo dell' integrale M negativo.

COROLLARIO IV.

265. Se si nomina Q la quantità d' acqua, che esce dall' apertura del tubo nel tempo t, e Q' quella che sorte nel tempo comunque multiplo o submultiplo mt, si ritrova $Q = \frac{fht\sqrt{(2b-2a)}}{\sqrt{(h^2-f^2)}} + \frac{2f^2h^2M}{h^2-f^2}$ log. 2, e $Q' = \frac{mfht\sqrt{(2b-2a)}}{\sqrt{(h^2-f^2)}} + \frac{2f^2h^2M}{h^2-f^2}$ log. 2. Di qui nasce $Q' = mQ - \frac{(m-1)\,2f^2h^2M}{h^2-f^2}$ log. 2.

Dunque *la quantità d' acqua versata dal tubo in un tempo multiplo o submultiplo d' un altro è tanto multipla o submultipla della quantità versata nel primo tempo, quanto dello stesso primo tempo è multiplo o submultiplo il secondo col solo divario della quantità* $\frac{(m-1)\,2f^2h^2M}{h^2-f^2}$ log. 2, *la quale si aggiugne alla quantità versata nel secondo tempo se è più lungo del primo, e si toglie, se è più corto.*

Nel

Nel caſo ordinario di $\frac{fv}{h} = o$, ovvero $h = \infty$, acquiſtiamo $Q = ft\surd(2b - 2\alpha) + 2f^2M \log. 2$; e $Q' = mft\surd(2b - 2\alpha) + 2f^2M \log. 2 = mQ - (m-1)\, 2f^2M \times \log. 2$.

Abbiamo fin qui ſuppoſto, che ne' vaſi e tubi ricurvi gli ſtrati dell' acqua, che eſce dall' apertura immerſa nell' acqua ſtagnante, ſieno tutti perpendicolari alla linea centrale; e ciò è conforme all' eſperienza ogni qual volta ſi tratta di tubi ricurvi piuttoſto riſtretti: Ma ſe i tubi ſono di qualche notabil larghezza, gli ſtrati ſi mantengono ſempre orizzontali; e queſto è il caſo, che ci convien porre a diſamina ne' ſeguenti Problemi.

PROBLEMA XLVI.

266. *Sia un tubo* AOLB (*Fig.* 36.) *di* Fig. 36. *qualunque forma, e di notabil larghezza, in cui l'acqua giugne da principio ſino in* AB, *ed eſce per l' inferior apertura* LO, *la quale ſi trova immerſa dentro una conſerva d' acqua ſtagnante alla profondità* α. *Nel tempo* t *ſi vuota la parte* ACDB *del tubo, e durante il movimento ſi mantiene coſtante l' aſſunta orizzontalità degli ſtrati*: *Si domanda quale ſarà dopo il tempo* t *la velocità dell' acqua nel paſſare per una data ſezione orizzontale* FG.

SOLUZIONE.

Si facciano le fezioni orizzontali $AB = h$, $CD = q$, $FG = n$, $MN = z$, $LO = f$. la linea centrale $IQT = \Delta$, $IQ = s$, $IE = r$, $IK = b$, $Ig = x$, $Il = \omega$. Si chiami φ l'angolo NQR fatto dalla fezione NM e dalla tangente QR della linea centrale, μ l'angolo fimile GPS, ψ l'angolo DEH, e finalmente β l'angolo BIV della fezione fuprema colla tangente IV, e θ l'angolo $OT\Pi$ della fezione infima colla tangente $T\Pi$.

Ciò pofto, fe u efprime la velocità dell' acqua per la data fezione FG in direzione della tangente PS, e p l'altezza della colonna d' acqua, il di cui pefo equivale alla preffione, a cui foggiace la fezione indefinita MN, abbiamo dal Problema XXI. l'equazione differenziale $p = x - \frac{n^2u^2 \text{ fen.} \mu^2}{2z^2 \text{ fen.} \varphi^2} - \frac{n^2udu \text{ fen.} \mu^2}{q\,dr \text{ fen.} \psi} \int \frac{ds}{z \text{ fen.} \varphi} + \text{Coft.}$ Siccome pertanto nell' apertura LO diventa $p = \alpha +$ l' altezza d' una colonna d' acqua che rapprefenta la preffione dell' atmosfera contro la fuperficie della ftagnante, cioè $p = \alpha + A$, ed $x = b$, $z = f$, $\varphi = \theta$; quindi deriva Coft. $= \alpha + A - b + \frac{n^2u^2 \text{ fen } \mu^2}{2f^2 \text{ fen.} \theta^2}$. Il perchè

na-

nasce $p = A + \alpha - b + x + \frac{n^2u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2f^2 \text{ sen. } \theta^2} - \frac{n^2u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2z^2 \text{ sen. } \varphi^2} - \frac{n^2udu \text{ sen. } \mu^2}{qdr \text{ sen. } \psi} \times \int \frac{ds}{z \text{ sen. } \varphi}$, dove dee pigliarsi l' integrale $\int \frac{ds}{z \text{ sen. } \varphi}$ in maniera, che svanisca quando $s = IQT = \Delta$, $z = f$, $\varphi = \theta$. Ma è stato supposto, che la sezione AB nel tempo t sia discesa in CD, e però CD non soggiace ad altra pressione che a quella dell' atmosfera equivalente al peso d' una colonna d' acqua di altezza $= P$. Dunque p si cangia in P allorchè $x = \omega$, $s = r$, $z = q$, $\varphi = \psi$. Perlocchè avremo

$$P = A + \alpha - b + \omega + \frac{n^2u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2f^2 \text{ sen. } \theta^2} - \frac{n^2u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2q^2 \text{ sen. } \psi^2} - \frac{n^2udu \text{ sen. } \mu^2}{qdr \text{ sen. } \psi} \int \frac{ds}{z \text{ sen. } \varphi},$$

avendo riguardo di pigliare l' integrale $\int \frac{ds}{z \text{ sen. } \varphi}$ in modo, che si annulli quando $s = \Delta$, e di surrogare poscia nella sua espressione r in luogo di s. Ora in questa equazione le quantità ω, q, sen. ψ per la nota forma del vaso sono tutte funzioni di r: si avrà dunque un' equazione differenziale a due sole variabili u, ed r, il di cui rapporto si renderà noto mediante l' integrazione. Il che era &c.

COROLLARIO I.

267. Qualora la ſezione CD non ſia eſtremamente elevata ſopra l' acqua ſtagnante dove il tubo inferiormente s' immerge, diviene $P = A$, e l' equazione ſi muta in $\alpha + \omega - b + \frac{n^2 u^2 \text{ſen.} \mu^2}{2f^2 \text{ſen.} \theta^2} - \frac{n^2 u^2 \text{ſen.} \mu^2}{2q^2 \text{ſen.} \psi^2} - \frac{n^2 udu \text{ſen.} \mu^2}{qdr \text{ſen.} \psi} \times \int \frac{ds}{z \text{ſen.} \varphi} = o$.

COROLLARIO II.

268. Se ſi nomina v la velocità, con cui l' acqua eſce dall' apertura LO in direzione della tangente $T\Pi$, e λ la lunghezza del priſma d' acqua verſata nel tempo t, acquiſtiamo $n^2 u^2 \text{ſen.} \mu^2 = f^2 v^2 \text{ſen.} \theta^2$, qdr ſen. $\psi = fd\lambda$ ſen. θ; e perchè inoltre ſen. $\varphi = \frac{dx}{ds}$, ſoſtituiti queſti valori nella precedente equazione, naſce queſt'altra $\alpha + \omega - b + \frac{1}{2} v^2 - \frac{f^2 v^2 \text{ſen.} \theta^2}{2q^2 \text{ſen.} \psi^2} - \frac{fvdv \text{ſen.} \theta}{d\lambda} \int \frac{ds^2}{zdx} = o$, oppure queſta $\alpha + \omega - b + \frac{1}{2} v^2 - \frac{f^2 v^2 \text{ſen.} \theta^2}{2q^2 \text{ſen.} \psi^2} - \frac{f^2 vdv \text{ſen.} \theta^2}{qdr \text{ſen.} \psi} \int \frac{ds}{z \text{ſen.} \varphi} = o$.

Co-

COROLLARIO III.

269. In quest' ultima equazione supposta l' apertura f picciolissima in confronto della sezione q, si possono disprezzare i due termini moltiplicati per f^2; ed allora risulta $\frac{1}{2}v^2 = b - \omega - \alpha$, cioè il

TEOREMA XXIV.

270. *Anche nel supposto dell' orizzontalità degli strati la velocità dell' acqua, che sbocca da un picciolissimo lume d' un tubo o vaso sommerso, è dovuta all' altezza dell' acqua, che rimane nel tubo sopra la superficie della stagnante, entro cui il tubo inferiormente s' immerge.*

COROLLARIO IV.

271. Se la linea centrale è una retta verticale, allora essendo $\beta = \theta = \mu = \psi = \varphi = 90^\circ$, le precedenti equazioni si convertono in quelle del Problema XXXV.

PROBLEMA XLVII.

272. *Inerendo all' ipotesi dell' orizzontalità degli strati, e supponendo ora, che il tubo* AOLB *sia mantenuto costantemente pieno, e che l' estremità inferiore* LO *s' immerga nell' acqua stagnante alla profondità* α; *ritrovare la velocità dell' acqua nel passare per una data sezione orizzontale* FG, *scorso che sia un certo tempo, cioè dopo che* AB *sarà discesa in* CD $=$ q.

 So-

SOLUZIONE.

Applicata l'equazione del Problema antecedente all'ipotesi della pienezza costante del tubo, si fa chiaro, che prendendo ora P per l'altezza d'una colonna d'acqua, il di cui peso rappresenta la pressione dell'atmosfera contro la sezione suprema AB, l'altezza p si trasforma in P allorchè $x = o$, $s = o$, $z = h$, $\varphi = \beta$; il che somministra l'equazione $P = A + \alpha - b + \frac{n^2u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2f^2 \text{ sen. } \theta^2} - \frac{n^2u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2h^2 \text{ sen. } \beta^2} - \frac{n^2udu \text{ sen. } \mu^2}{qdr \text{ sen. } \psi} \int \frac{ds^2}{zdx}$, nella quale l'integrale $\int \frac{ds^2}{zdx}$ dovrà prendersi in modo, che svanisca quando $s = \Delta$, e poscia nella sua espressione sostituirsi $s = o$, $z = h$; e ciò cangerà il detto integrale in una quantità costante e determinata. Laonde avremo un'equazione differenziale espressa in funzioni delle due sole variabili u, r; e però l'integrazione ci farà conoscere il loro rapporto. Il che era ec.

COROLLARIO I.

273. E' manifesto, che $\frac{nu \text{ sen. } \mu}{h \text{ sen. } \beta}$ è la velocità dell'acqua nella suprema sezione AB in direzione della linea centrale. Quindi è che non potrà aver luogo la precedente equazione, se l'ac-

l'acqua, che accorre in AB a supplir quella che viene mancando, non avrà quivi una tale velocità, e nella medesima direzione. Che se all'opposto l'acqua supplimentaria vi accorrerà dolcemente dai lati senza avere velocità alcuna in direzione della linea centrale, sarà mestieri di annullare nella predetta equazione il termine $\frac{n^2u^2 \text{sen.} \mu^2}{2h^2 \text{sen.} \beta^2}$, ed allora si ottiene $P = A + \alpha - b + \frac{n^2u^2 \text{sen.} \mu^2}{2f^2 \text{sen.} \theta^2} - \frac{n^2udu \text{ sen.} \mu^2}{qdr \text{ sen.} \psi} \int \frac{ds^2}{zdx}$.

COROLLARIO II.

274. Supposto $P = A$, cioè la sezione suprema non eccessivamente elevata sopra l'acqua stagnante dove s'immerge l'orifizio del tubo, e parimente qdr sen. $\psi = fd\lambda$ sen. θ, n^2u^2 sen. $\mu^2 = f^2v^2$ sen. θ^2, l'equazione diventa $\alpha - b + \frac{1}{2}v^2 - \frac{f^2v^2 \text{ sen.} \theta^2}{2h^2 \text{sen.} \beta^2} - \frac{fvdv \text{ sen.} \theta}{d\lambda} \int \frac{ds^2}{zdx} = 0$.

PROBLEMA XLVIII.

275. *Supposto il tubo* ARSB (Fig. 47), *di cui tutte le sezioni* AB, HL, RS ec. *orizzontali sieno tanti circoli uguali, e la linea centrale* CGI *un arco di cerchio descritto col raggio* $= a$, *ed avente per tangente la verticale* CF; *e supposta*

Fig. 47.

inoltre l' immerfione della fua parte inferiore nell' acqua ftagnante alla profondità α*, l' orizzontalità degli ftrati, e la pienezza coftante del tubo: fi domanda il rapporto fra la velocità dell' acqua, che forte dall' apertura* PQ*, e la lunghezza del prifma fortito in un dato tempo.*

SOLUZIONE.

Prendo l' equazione del Corollario precedente $\alpha = b + \frac{1}{2}v^2 - \frac{f^2v^2 \text{ fen. } \theta^2}{2h^2 \text{ fen. } \beta^2} - \frac{fvdv \text{ fen. } \theta}{d\lambda}\int\frac{ds^2}{zdx}$, ed applicandola al cafo prefente faccio $z = h$, fen. $\beta = 1$, e nomino M l' integrale $\int\frac{ds^2}{zdx}$ da pigliarfi nella maniera prefcritta. Quindi ottengo $2h^2(b - \alpha)d\lambda - h^2v^2d\lambda + f^2v^2d\lambda \text{ fen.} \theta^2 + 2fh^2Mvdv \text{ fen. } \theta = 0$, e confeguentemente $d\lambda = \frac{-2fh^2Mvdv \text{ fen. } \theta}{2h^2(b-\alpha)-(h^2-f^2\text{ fen.}\theta^2)v^2}$.

Paffo ora ad integrare quefta equazione, e ritrovo $\lambda = \frac{fh^2 M \text{ fen.} \theta}{h^2-f^2 \text{ fen.} \theta^2} \log. [2h^2(b-\alpha) - (h^2 - f^2 \text{ fen. } \theta_2)v^2] - \text{Coft.}$ E poichè λ, e v debbono fvanire infieme, nafce Coft. $= -\frac{fh^2M \text{ fen. } \theta}{h^2-f^2 \text{ fen. } \theta^2} \log. 2h^2(b-\alpha)$; e perciò $\lambda =$

fh^2

$$\frac{fh^2 M \text{ sen. } \theta}{h^2 - f^2 \text{ sen. } \theta^2} \log. \frac{2h^2(b-\alpha) - (h^2 - f^2 \text{sen. } \theta^2)v^2}{2h^2(b-\alpha)},$$

ovvero $\frac{(h^2 - f^2 \text{sen. } \theta^2)\lambda}{fh^2 M \text{ sen. } \theta} =$

$\log. \frac{2h^2(b-\alpha) - (h^2 - f^2 \text{ sen. } \theta^2)v^2}{2h^2(b-\alpha)}$. Il perchè facendo passaggio da' logaritmi ai numeri se ne ricava

$$e^{\frac{(h^2 - f^2 \text{sen. } \theta^2)\lambda}{fh^2 M \text{ sen. } \theta}} = \frac{2h^2(b-\alpha) - (h^2 - f^2 \text{ sen. } \theta^2)v^2}{2h^2(b-\alpha)},$$

vale a dire $v^2 = \frac{2h^2(b-\alpha)}{h^2 - f^2 \text{ sen. } \theta^2} \times$ $\left(1 - e^{\frac{(h^2 - f^2 \text{ sen. } \theta)\lambda}{fh^2 M \text{ sen. } \theta}}\right)$. Per ritrovare ora l' integrale M, cioè $\frac{1}{h}\int \frac{ds^2}{dx}$, si osservi, che presa $CE = x$, e $Gg = ds$, per la proprietà del cerchio si ha $ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, $\frac{ds^2}{dx} = \frac{a^2 dx}{a^2 - x^2} = \frac{\frac{1}{2}adx}{a-x} + \frac{\frac{1}{2}adx}{a+x}$. Dunque $\int \frac{ds^2}{dx} = \frac{1}{2}a \log. \frac{a+x}{a-x}$. Ma perchè quest' integrale dee svanire quando $s = CGI = \Delta$, ovvero $x = CF = b$; sarà perciò $\int \frac{ds^2}{dx} = \frac{1}{2}a \log. \frac{a+x}{a-x} - \frac{1}{2}a \log. \frac{a+b}{a-b}$; e siccome in questa espressione con-

convien ora assumere $x = 0$, nasce in fine $\int \frac{ds^2}{dx} = -\frac{1}{2}a \log. \frac{a+b}{a-b}$, cioè $M = -\frac{a}{2h} \log. \frac{a+b}{a-b}$. Laonde sostituito questo valore in quello di v^2, si ottiene finalmente $v^2 =$

$$\frac{2h^2(b-a)}{h^2 - f^2 \text{ sen. } \theta^2}\left(1 - e^{\frac{-2(h^2 - f^2 \text{ sen. } \theta^2)\lambda}{afh \text{ sen. } \theta \log. \frac{a+b}{a-b}}}\right).$$

Il che era ec.

ESEMPIO.

276. Si supponga la linea centrale

$CI = \Delta =$	un sestante di
. . . .	semicirconferenza
Il semidiametro $a =$	30 piedi
sarà $CF = b =$	15 piedi
L'angolo $SIN = \theta = 60^\circ$, e	
però sen. $\theta = \sqrt{\frac{3}{4}} =$	0,866
$h =$	1
$f =$	$\frac{1}{4}$
log. iperb. $\frac{a+b}{a-b}$ = log. ip. 3 = . . .	1,0986

Avremo quindi $v^2 =$

$$\frac{2 \cdot 64\,(b-a)}{61}\left(1 - e^{\frac{-2 \cdot 61\,\lambda}{480 \cdot 0,866 \cdot 1,0986}}\right) =$$

$$\frac{2 \cdot 64}{61}(b-a)\left(1 - e^{-0,266\lambda}\right).$$

co-

COROLLARIO.

277. Nell' ordinaria ipotesi, che l' acqua riparatrice della erogata accorra lateralmente in AB senza concepire alcuna velocità in direzione della linea centrale, onde abbiasi $\frac{fv \text{ sen. } \theta}{h} = 0$, basterà supporre $h = \infty$ nel valore di v^2, e si conseguirà per questa ipotesi $v^2 =$

$$2(b-\alpha)\left(1 - e^{\frac{-2h\lambda}{af \text{ sen. } \theta \log. \frac{a+b}{a-b}}}\right) = 2(b-\alpha)\left(1 - e^{-0{,}2804\lambda}\right).$$

278. Si presenta qui un caso inaspettato e singolarissimo, che merita di essere esaminato con attenzione. Allorchè la linea centrale CGI è un quadrante circolare, l' orizzontale FI diventa $= CF$, e tangente della linea centrale in I, e però $\theta = o$, $a = b$. Perlocchè il valore di v^2 si cangia in

$$2(b-\alpha)\left(1 - e^{\frac{-2h\lambda}{af \times o \log. \frac{2a}{o}}}\right);$$ e perchè si fa essere la quantità $o \log. \frac{2a}{o} = o$, ne viene in conseguenza, che sarà $e^{\frac{-2h\lambda}{af \times o \log. \frac{2a}{o}}}$ $=$

$= e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}}$, vale a dire infinitesima. Dunque $v^2 = 2(b-\alpha)$, ed $\frac{1}{2}v^2 = b-\alpha$, cioè l'altezza dovuta alla velocità nell'apertura del vaso è l'altezza stessa dell'acqua del vaso sopra la superficie della stagnante, qualunque sia l'apertura f, per modo che quand'anche il vaso fosse senza fondo, ossia $f = h$, la velocità dell'uscita sarebbe la stessa che se l'apertura fosse picciolissima, ed anche infinitesima; il che sembra ripugnare a ciò che altronde si conosce delle velocità dell'acqua nell'uscire dalle aperture dei vasi. Pare qui adunque, che il calcolo si trovi in difetto, o anzi a non altro serva che a condurre fuori di strada. Ma se dirittamente si esamina, si scorgerà di leggieri, che qui il calcolo risponde precisamente e a rigore a quanto gli si domanda. In fatti si vuol sapere, qual sarà la velocità dell'acqua all'uscire dal foro PQ in direzione della linea centrale; e perchè questa direzione è orizzontale quando la linea centrale CI è un quadrante circolare, avendo allora per tangente la retta orizzontale FS, perciò la dimanda si riduce a voler conoscere, la velocità, con cui l'acqua sorte in direzione orizzontale dal foro. Ora quand'anco il vaso sia senza fondo, non può l'acqua uscire in direzione orizzontale, perchè incontra nella sponda S del vaso un impedimento

to all' uſcita. Quindi è, che la velocità ricercata non può eſſere una velocità *attuale*, ma unicamente *virtuale*, quale appunto è ſempre nello ſtato di acqua ſtagnante: ed in queſto caſo è evidente, che la velocità *virtuale* ſarà dovuta all' altezza della ſezione ſuprema del vaſo ſopra la ſuperficie dell'acqua in cui trovaſi immerſo. Ed ecco come il calcolo riſponde ſempre a dovere per chi ne intende il linguaggio.

SE-

SEZIONE VIII.

Del Rifluſſo dell' acqua ne' vaſi ſommerſi.

279. Avendo fin qui conſiderato il moto dell' acqua, che diſcende dentro i vaſi ſommerſi, reſta ora ad eſaminare il moto dell' acqua, che aſcende: imperciocchè ſiccome l' acqua nel diſcendere per l' impeto concepito ſi porta al di là del livello dell' eſterna ſtagnante, dove il vaſo s' immerge, viene quindi coſtretta per la preſſione di queſta a riſalire, formando così con ſiffatto moto alterno una ſpecie di fluſſo e rifluſſo, o ſivvero di oſcillazione. Paſſiamo pertanto al

PROBLEMA XLIX.

Fig. 48. 280. *Il vaſo, o tubo* AFGB (Fig. 48) *di qualunque forma trovaſi tuffato in una conſerva d' acqua ſtagnante all' altezza* TI *ſopra la ſezione infima orizzontale* FG, *eſſendo* TX *il pian di livello dell' acqua eſterna ſtagnante: L' acqua interna, che riempiva il tubo, e che eſce pel foro* PQ, *è diſceſa fino in* RZ *alla maſſima profondità* TS *ſotto la ſuperficie dell' eſterna, e quivi è obbligata ad aſcendere dallo sforzo, che fa l' acqua eſterna ſtagnante contro la ſezione del foro* PQ: *Ciò ſtante*

te, e supposta l' orizzontalità degli strati, cercasi la velocità dell' acqua ascendente nel passare per una data sezione orizzontale DE *in direzione della linea centrale scorso che sia un certo tempo, ovvero dopo che la sezione suprema sarà salita in* HK.

SOLUZIONE.

Dal punto infimo I della linea centrale COI si conduca in alto la retta verticale $I\beta$, e si faccia

$IT = \ldots \alpha$
$I\Delta = \ldots \omega$
$IV = \ldots x$
$IS = \ldots \varepsilon$
$IO = \ldots s$
$IU = \ldots r$
$MN = \ldots z$
$DE = \ldots n$
$HK = \ldots q$
$PQ = \ldots f$
La velocità ricercata per la data sezione $DE = \ldots u$
La velocità dell' ingresso pel foro $PQ = \ldots v$
L' angolo PIm fatto dalla sezione infima, e dalla linea centrale $= \ldots \theta$
L' angolo $MOo = \ldots \varphi$
L' angolo $HUu = \ldots \psi$
L' angolo $DgU = \ldots \mu$
Si tirino quindi la sezione mn infinitamente pros-

proſſima alla indefinita MN, e la hk pure infinitamente vicina alla suprema HK, e ſia $MNnm = HKkh$. Ciò poſto, le forze che agiſcono ſull'elemento $MNnm$ ſono le ſeguenti: 1.° il ſuo proprio peſo $= z dx$, che lo ſolecita d'alto in baſſo in direzione verticale, e che in direzione oO della linea centrale agiſce con una forza $= z dx$ sen. φ. 2.° La preſſione dell'acqua contenuta in $MFGN$ contro la ſuperficie MN, la qual preſſione equivale al peſo d'un priſma d'acqua, che ha MN per baſe e p per altezza, cioè è $= pz$, eſſendo p una funzione di x, ovvero s: queſt'altezza p ſarebbe quella, a cui ſi ſoſterrebbe l'acqua in un cannello verticale adattato in M alla parete del vaſo. Riſolvendo queſta preſſione, che ſi eſercita dal baſſo all'alto verticalmente contro MN, in due altre, una ſecondo Oo, l'altra in direzione perpendicolare ad Oo, ſi trova la prima di queſte due $= pz$ sen. φ. 3.° La preſſione eſercitata verticalmente d'alto in baſſo dall'acqua ſuperiore, cioè contenuta in $mnKH$ contro la ſuperficie mn; e queſta viene rappreſentata dal peſo d'un priſma d'acqua eretto verticalmente ſopra mn all'altezza $p + dp$, eſſendo dp poſitivo o negativo ſecondo l'indole della quantità variabile p, che è ſempre una funzione di x: e però trovaſi eſſa $= mn \times (p + dp) = z(p + dp)$, e mediante la riſoluzione trovaſi il ſuo sforzo in direzione di

oO

$oO = z(p + dp)$ sen. φ. Da tutto ciò apparisce, che l'elemento Mn è spinto nella direzione di Oo dalla forza motrice pz sen. φ, e nella direzione oppofta oO dalle due forze motrici zdx sen. φ, $z(p + dp)$ sen. φ. Dunque tutta la forza mótrice dell' elemento nella direzione Oo fi ridurrà $= pz$ sen. φ $-$ zdx sen. $\varphi - z(p + dp)$ sen. $\varphi = -$ zdx sen. $\varphi - zdp$ sen. φ, e dividendo per la maffa zdx, fi ha la forza acceleratrice dell' elemento nella direzione del moto dell' acqua $= -\frac{(dx + dp) \text{ sen. } \varphi}{dx} = \frac{-dx - dp}{ds}$. Offervifi ora, che effendo u la velocità dell' acqua per la data sezione DE in direzione della linea centrale, la velocità per la sezione indefinita MN in direzione di Oo sarà pel Teorema IV. $= \frac{nu \text{ sen. } \mu}{z \text{ sen. } \varphi} = y$. Laonde dal principio delle forze acceleratrici fi ritrae $\frac{-dx - dp}{ds} ds$ $= - ydy$ (a) $= - \frac{n^2 udu \text{ sen. } \mu^2}{z^2 \text{ sen. } \varphi^2} +$ $\frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2 (dz \text{ sen. } \varphi + zd\varphi \cos. \varphi)}{z^3 \text{ sen. } \varphi^3}$. E perchè

Ff

(a) Si prende qui dy negativo, perchè la velocità y a misura che l'acqua ascende va scemando ficcome va scemando l'impulso dell'acqua efterna contro il fóro PQ.

chè $MNnm = HKkh$, cioè $z ds$ sen. $\varphi =$ $q dr$ sen. ψ, oppure z sen. $\varphi = \frac{q dr \text{ sen. } \psi}{ds}$, si otterrà $- dx - dp = - \frac{n^2 u du\, ds \text{ sen. } \mu^2}{q dr \text{ sen. } \psi\, z \text{ sen. } \varphi} +$ $\frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2 (dz \text{ sen. } \varphi + z d\varphi \text{ cos. } \varphi)}{z^3 \text{ sen. } \varphi^3}$, vale a dire $dp = - dx + \frac{n^2 u du\, ds \text{ sen. } \mu^2}{q dr \text{ sen. } \psi\, z \text{ sen. } \varphi} -$ $\frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2 (dz \text{ sen. } \varphi + z d\varphi \text{ cos } \varphi)}{z^3 \text{ sen. } \varphi^3}$. Passando ad integrare questa equazione si riguardino come variabili le z, x, s, φ che dipendono dal luogo indefinito M del vaso, e come costanti le u, r, q, ψ, le quali, qualunque sia lungo tutto il tratto HR del vaso il luogo M, rimangono le stesse. Nasce adunque $p = - x + \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2 z^2 \text{ sen. } \varphi^2} + \frac{n^2 u du \text{ sen. } \mu^2}{q dr \text{ sen. } \psi} \times$ $\int \frac{ds}{z \text{ sen. } \varphi}$ + Cost. Si determina la Cost. con riflettere, che nell' orifizio PQ diventa $x = o$, $z = f$, $\varphi = \theta$, $p = A + \alpha$, essendo A l' altezza della colonna d' acqua equiponderante all' atmosfera, da cui viene premuta la superficie XT dell' acqua stagnante, ed α l' altezza TI dell' acqua stagnante sopra il foro, con-

contro il quale la ſteſſa ſtagnante preme in ragione della sua altezza. Il perchè risulta Coſt. $= A + \alpha - \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2f^2 \text{ sen. } \theta^2}$, e quindi $p = A + \alpha - x - \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2f^2 \text{ sen. } \theta^2} + \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2\zeta^2 \text{ sen. } \varphi^2} + \frac{n^2 u du \text{ sen. } \mu^2}{q dr \text{ sen. } \psi} \int \frac{ds}{\zeta \text{ sen. } \varphi}$, avendo riguardo di pigliare l' integrale $\int \frac{ds}{\zeta \text{ sen. } \varphi}$ in modo, che svaniſca quando $s = 0$. Ma poichè contro la sezione suprema HK non preme che l' atmosfera con uno sforzo rappresentato dal peso d' una colonna d'acqua di altezza P, ed è quivi $x = \omega$, $\zeta = q$, $\varphi = \psi$, $s = r$; perciò, fatte queſte ſoſtituzioni, ſi ricava $P = A + \alpha - \omega - \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2f^2 \text{ sen. } \theta^2} + \frac{n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2}{2q^2 \text{ sen. } \psi^2} + \frac{n^2 u du \text{ sen. } \mu^2}{q dr \text{ sen. } \psi} \int \frac{ds}{\zeta \text{ sen. } \varphi}$, ovvero, eſſendo $P = A$, $\alpha - \omega - n^2 u^2 \text{ sen. } \mu^2 \left(\frac{1}{2f^2 \text{ sen. } \theta^2} - \frac{1}{2q^2 \text{ sen. } \psi^2}\right) + \frac{n^2 u du \text{ sen. } \mu^2}{q dr \text{ sen. } \psi} \int \frac{ds}{\zeta \text{ sen. } \varphi} = 0$, dove dee pigliarſi l'integrale $\int \frac{ds}{\zeta \text{ sen. } \varphi}$ in maniera, che svaniſca inſieme con s, e che acquiſti il suo compimento con porre r in luogo di s.

Ora poichè in questa equazione le quantità ω, q, sen. ψ sono funzioni di r, l' integrazione di lei ci farà conoscere la relazione fra u, ed r, come si ricercava. Il che era ec.

COROLLARIO I.

281. Chiamata v la velocità dell' acqua nell' ingresso per l' apertura PQ in direzione della linea centrale Im', si acquista n^2u^2 sen. $\mu^2 = f^2v^2$ sen. θ^2, ed n^2udu sen. $\mu^2 = f^2vdv \times$ sen. θ^2, e l' equazione precedente si trasforma in $\alpha - \omega - \frac{1}{2}v^2 + \frac{f^2v^2 \text{ sen. } \theta^2}{2q^2 \text{ sen. } \psi^2} + \frac{f^2vdv \text{ sen. } \theta^2}{qdr \text{ sen. } \psi} \int \frac{ds}{z \text{ sen. } \varphi} = 0$.

COROLLARIO II.

282. Se il lume f è picciolissimo in paragone della suprema sezione q, nell' equazione del Corollario precedente si possono disprezzare i due ultimi termini, e si ritrae $\frac{1}{2}v^2 = \alpha - \omega$, cioè il seguente

TEOREMA XXV.

283. *In un vaso o tubo sommerso dentro un recipiente d' acqua la velocità, con cui questa entra nel tubo per un picciolissimo lume aperto nel fondo, è dovuta all' altezza dell' acqua esterna del recipiente sopra l' interna del tubo.*

COROLLARIO III.

284. Se si suppone $\mu = \theta = \psi = \varphi = 90^\circ$, l' equazione del Problema antecedente diventa $\alpha - \omega - n^2u^2\left(\frac{1}{2f^2} - \frac{1}{2q^2}\right) + \frac{n^2udu}{qdr}\int\frac{ds}{z} = o$, e quella del Corollario I. si cangia in $\alpha - \omega - \frac{1}{2}v^2 + \frac{f^2v^2}{2q^2} + \frac{f^2vdv}{qdr}\int\frac{ds}{z} = o$.

PROBLEMA L.

285. *Ritrovare la velocità dell' acqua, che in un vaso prismatico verticale tuffato in un recipiente d' acqua stagnante, passa per una data sezione del vaso ascendendo dentro il medesimo per l' impulso dell' acqua esterna contro il foro aperto nel fondo, nell' ipotesi che il fondo sia sommerso alla profondità α sotto il livello della stagnante.*

SOLUZIONE.

In questo caso abbiamo $n = q = z$, $r = \omega$, e l' integrale $\int\frac{ds}{z} = \frac{s}{n}$, il quale si annulla, come è dovere, quando $s = o$, e riceve il suo compimento ponendo $s = r = \omega$, e però nasce $\int\frac{ds}{z} = \frac{\omega}{n}$. Perciò l' equazione

$\alpha - \omega - n^2u^2\left(\frac{1}{2f^2} - \frac{1}{2q^2}\right) + \frac{n^2udu}{qdr}\int\frac{dz}{z}$ $= 0$ si trasforma in $\alpha - \omega + \frac{1}{2}u^2 - \frac{n^2u^2}{2f^2}$ $+ \frac{\omega udu}{d\omega} = 0$, ovvero in $2(\alpha - \omega)d\omega$ $+ \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right)u^2d\omega + 2\omega udu = 0$. Si moltiplichi questa equazione per $\omega^{-\frac{n^2}{f^2}}$, onde risulti $2(\alpha - \omega)\omega^{-\frac{n^2}{f^2}}d\omega + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) \times$ $u^2\omega^{-\frac{n^2}{f^2}}d\omega + 2\omega^{1 - \frac{n^2}{f^2}}udu = 0$; ed il suo integrale sarà $\frac{2f^2\alpha\omega^{1 - \frac{n^2}{f^2}}}{f^2 - n^2} - \frac{2f^2\omega^{2 - \frac{n^2}{f^2}}}{2f^2 - n^2}$ $+ u^2\omega^{1 - \frac{n^2}{f^2}} + \text{Cost.} = 0$. La Cost. si determina con osservare, che incomincia l' acqua ad ascendere nel tubo allorchè $\omega = IS$ $= \varepsilon$. Dunque posto $u = 0$ quando $\omega = \varepsilon$; si ha Cost. $= \frac{2f^2\varepsilon^{2 - \frac{n^2}{f^2}}}{2f^2 - n^2} - \frac{2f^2\alpha\varepsilon^{1 - \frac{n^2}{f^2}}}{f^2 - n^2}$.

Per-

Perlocchè fatte le debite operazioni si trova

$$u^2 = \frac{2f^2\alpha}{n^2 - f^2}\left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}}\right) - \frac{2f^2\varepsilon}{n^2 - 2f^2} \times \left(\frac{\omega}{\varepsilon} - \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^{1 - \frac{n^2}{f^2}}\right) = \frac{2f^2\alpha}{n^2 - f^2} \times$$

$$\left(1 - \left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^{\frac{n^2}{f^2} - 1}\right) - \frac{2f^2\varepsilon}{n^2 - 2f^2} \times \left(\frac{\omega}{\varepsilon} - \left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^{\frac{n^2}{f^2} - 1}\right)$$. Il che era ec.

Riflessioni sopra i due Problemi precedenti.

286. Chiamata a disamina la formola ora ritrovata $u^2 = \frac{2f^2\alpha}{n^2 - f^2}\left(1 - \left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^{\frac{n^2}{f^2} - 1}\right) - \frac{2f^2\varepsilon}{n^2 - 2f^2}\left(\frac{\omega}{\varepsilon} - \left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^{\frac{n^2}{f^2} - 1}\right)$ si scorge immantinente, che questa in molte circostanze somministra de' risultati visibilmente falsi, e contrarj all' esperienza, come per esempio quando ε è $= 0$, cioè quando il tubo affatto vuoto s'immerge nell' acqua stagnante; così pure quando

f, ossia il foro è piccioliffimo in confronto della base *n* del cilindro, ec. Anche il Sig. Ab. BOSSUT (*a*) applicando il famoso Principio Dinamico dei Signori D'ALEMBERT, e FONTAINE al Problema de' vasi sommersi ritrova un' equazione differenziale, la quale, qualora sia debitamente integrata, produce una formola simile alla nostra precedente: ma perchè questo dotto Geometra non passò all' integrazione della sua equazione differenziale, e non potè quindi esaminarne il risultato; perciò credette di poter asserire, che *lorsqu' on voudra appliquer toute cette théorie à des exemples particuliers, ... on trouvera qu' elle s' accorde assez bien avec l' experience, sinon pour le commencement du mouvement, du moins aprés un certain tems, et lorsque le fluide a acquis quelque hauteur dans le cylindre.*

SE-

(a) Hydrod. tom. 1. Part. II. Note 9. pag. 362.

SEZIONE IX.

Delle Clepsidre, o Vasi, che per un picciol foro si vanno vuotando del liquido contenuto.

287. E' noto agli eruditi Indagatori delle Antichità, che fra gli altri ordigni, di cui facean uso gli Antichi, per misurare il tempo, uno de' più acclamati era l'oriuolo ad acqua, denominato *Clessidra*, a cui davano per dilettar l'occhio, e formare un grazioso spettacolo diverse figure e grandezze tutte ornate in varj modi con più, o meno d'arte; come può vedersi nelle *Osservazioni* sopra VITRUVIO del Medico PERRAULT, di cui seguita tutti i passi il celebre Storico *dell' Astronomia* ove di ciò fa parola. Se si considera la cosa sotto un aspetto puramente scientifico e per quella parte, che può appartenere all' Idraulica, tutto si riduce al Problema di saper misurare il tempo, in cui la superficie d'un fluido contenuto in un vaso d'una certa forma si abbassa di una data altezza. Ecco dunque generalmente il

PROBLEMA LI.

288. *Dato un vaso di qualunque forma avente un picciolissimo orifizio verso il fondo, ed empito d'acqua fino ad una data altezza sopra l'orifizio; vuolsi*

fuolsi determinare il tempo, che quest' acqua uscendo dal foro impiega ad abbassarsi d' un' altezza nota qualunque.

SOLUZIONE.

Se si suppone il foro infinitamente picciolo (al qual supposto nello stato Fisico della quistione supplisce senza notabile divario una picciolezza anche non eccessiva), si è già dimostrato, che l' acqua esce dal foro colla velocità dovuta all' altezza di lei sopra il foro stesso, vale a dire con quella medesima velocità, che acquista un grave nel cadere da tale altezza. Sicchè nominando a l' altezza primitiva dell' acqua sopra l' orifizio; x la discesa fatta dall' acqua nel tempo t; e però $a - x$ l' altezza dell' acqua sopra l' orifizio dopo il tempo t; ω l' area dell' orifizio; e finalmente α l' altezza, da cui casca un grave nel tempo θ, le leggi dell' accelerazione de' gravi danno $\frac{\theta\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{\alpha}}$ pel tempo della caduta d' un grave dall' altezza $a - x$, e in questo stesso tempo uscirebbe dall' orifizio un prisma d' acqua di base $= \omega$, e di altezza $= 2(a - x)$, qualora però si mantenesse costante la velocità dovuta all' altezza $a - x$: onde con tal velocità costante la quantità d' acqua uscita nel tempo $\frac{\theta\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{\alpha}}$ sarebbe $2\omega(a - x)$. Essendo per-

pertanto proporzionali ai tempi le quantità d'acqua uſcite colla ſteſſa velocità uniforme, la quantità uſcita colla detta velocità nel tempo t, per l'analogia $\frac{\theta\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{a}} : t :: 2\omega \times (a-x) : \frac{2t\omega\sqrt{a}\sqrt{(a-x)}}{\theta}$, riuſcirebbe $= \frac{2t\omega\sqrt{a}\sqrt{(a-x)}}{\theta}$. Ma nel tempicciuolo infiniteſimo dt quella velocità ſi mantiene realmente uniforme: dunque fatta la proporzione $t : dt :: \frac{2t\omega\sqrt{a}\sqrt{(a-x)}}{\theta} : \frac{2\omega dt\sqrt{a}\sqrt{(a-x)}}{\theta}$, la quantità uſcita nel tempicciuolo dt ſarà $= \frac{2\omega dt\sqrt{a}\sqrt{(a-x)}}{\theta}$. Ora queſta ſteſſa quantità (chiamando X la ſuperficie o falda ſuprema dell' acqua corriſpondente all' altezza $a-x$, e dx il ſuo abbaſſamento nell' iſtante dt) è anche $= Xdx$; conſeguentemente riſulta l' equazione $\frac{2\omega dt\sqrt{a}\sqrt{(a-x)}}{\theta} = X\,dx$, dalla quale deriva

$$dt = \frac{\theta}{2\omega\sqrt{a}} \cdot \frac{X\,dx}{\sqrt{(a-x)}}$$, ed integrando

$$t = \frac{\theta}{2\omega\sqrt{a}}\int\frac{Xdx}{\sqrt{(a-x)}}$$. Dal che appariſce, che data la figura del vaſo, cioè la relazione fra

X,

X, ed x ſi conoſce il tempo cercato; ſiccome pure data la relazione di t ad x ſi fa nota la X, e quindi la figura del vaſo. Il che era ec.

SCOLIO I.

289. In grazia di que' lettori geometri, i quali non diſgradano le ricerche erudite in coſe appartenenti alla loro Facoltà, ſiami permeſſo queſt' unica volta toccar qui alcuni punti intorno all' origine e all' uſo delle Clepſidre preſſo gli Antichi in conferma e ſupplimento di quel poco, che trovo da altri notato ſu queſto curioſo argomento.

Le Clepſidre, il cui vocabolo deriva da κλεπτω, *condo*, e da υδωρ, *aqua*, ſebbene d' ordinario foſſero ad acqua, ve ne furono però anco a mercurio. Credonſi inventate in Egitto ſotto i TOLOMEI, come altresì gli orologj solari, valendoſi di quelle gli Egiziani principalmente in tempo d' inverno, di queſti in eſtate. Alla claſſe delle Clepſidre ſi riduce parimente la famoſa Macchina Idraulica inventata verſo la metà del ſecondo ſecolo avanti l' era volgare da CTESIBIO ALESSANDRINO, il quale incoraggito dalla ſua ſorprendente ſcoperta dell' Organo Idraulico ſi valſe de' più ingegnoſi artifizj meccanici per ottenere una miſura del tempo, e fabbricò a tal uopo una macchina regolata da ruote dentate, le quali meſſe in moto dall' impulſo dell' acqua corrente comunicavano

il

il movimento ad una colonna, su cui erano segnati alcuni caratteri per indicare i mesi e le ore. Nel tempo stesso che l' acqua dava urto alle ruote, sollevava una piccola statua, la quale con una bacchetta mostrava i mesi e le ore impresse sulla colonna. Ma della Clepsidra ordinaria abbiamo la descrizione in SUIDA, il quale la caratterizza così: *vas est, angustissimo ore circa fundum, quod guttatim aqua desiuente certum temporis spatium notabat, quo tempore non modo privatim declamabant rhetores, sed etiam in foro actor et reus aequali spatio perorabant*. E questa è quella Clepsidra famosa, alla quale gli Oratori, e gl' Istorici fanno così spesso allusione con tante espressioni allegoriche, che ARPOCRAZIONE compose espressamente un libro per darne la spiegazione. Quivi egli asserisce, che con questo stromento si misurava il tempo delle aringhe de' più valenti Oratori, e rende ragione de' noti proverbj, ἐν τῷ ἐμεῦ ὕδατι δειξάτω, *egli parla nella mia acqua*, cioè nel tempo a me destinato; e τὸν κλεψυδριον μετεχειν, *vivere del prodotto delle declamazioni*, regolate dallo scolo della Clepsidra. Siccome era costume di versare tre parti d' acqua uguali nel vaso, una per l' accusatore, l' altra per l' accusato, la terza pel giudice, una tal costumanza fece nascere le espressioni usitate, che s' incontrano in ESCHINE, πρωτον, δευτερον, τριτον ὕδωρ. A questo solo uso era destinata nel Foro d' Atene una.

una Fontana guardata da un leone di bronzo; ſul quale tenevaſi aſſiſo colui, che avea l' incarico di diſtribuir l' acqua nel vaſo per regola de' pubblici giudizj; ed un Inſpettore eletto a ſorte dovea aver cura, che l'acqua foſſe ugualmente diſtribuita. Avendo riguardo a queſta limitata diſtribuzione d' acqua, che circoſcriveva dentro certi confini le aringhe degli Oratori, PLATONE ebbe a dire con verità, che gli Oratori erano ſchiavi, laddove i Filoſofi erano liberi, perchè queſti ſi eſtendevano ne' loro diſcorſi ſenza alcun impedimento o reſtrizione, e quelli per l' oppoſto erano ſubordinati allo ſcolo dell' acqua d' una miſerabile Clepſidra, che gli obbligava a tacere, κατεπείγει γαρ ὕδωρ ῥέον̃.

Un ſiffatto uſo paſsò ſenza alcuna alterazione dal Foro d' Atene in quello di Roma: Quindi è, che sì ſpeſſo s' incontrano nelle opere de' latini Scrittori quelle eſpreſſioni *aqua mihi haeret*; *aquam perdere*, e talvolta quell' altra *ſilentium clepſydra indicere*, e parimente *paucioribus clepſydris rem abſolvere*, ed altre ſimili. Allorchè l' Oratore per ubbidire alla legge ſi trovava coſtretto ad interrompere un diſcorſo, che era ſtato il frutto di molte veglie, dicevaſi *in actione aqua deficit*: e quando i Giudici per eſtraordinaria indulgenza raddoppiavano il tempo, che veniva dalla legge accordato, ciò eſprimevaſi colla formola *clepſydras clepſydris ad-*

dere

dere, siccome coll' altra locuzione *aquam suspendere* veniva significata la sospensione del gocciolamento della Clepsidra, di cui sempre si arrestava lo scolo negl' intervalli, in cui si faceva la lettura degli atti relativi al discorso dell' Oratore, ma non formanti corpo con esso, quali erano la deposizione de' testimonj, il testo d' una legge, il tenore d' un decreto, ed altri consimili.

Ma perchè la cura di metter l' acqua nella Clepsidra riguardava un ministero inferiore, e le persone, che lo esercitavano erano d' ordinario d' un carattere basso ed abbietto, quindi avveniva, che ad onta della severità della legge frequentissime erano le frodi, che venivano in ciò praticate. Si immaginò ogni sorta di artifizio e d' astuzia per accelerare o ritardare l' uscita dell' acqua, ora mettendo in opra acque più o meno dense, rese anche tali dall' arte, ora distaccando o aggiugnendo della cera alla capacità del vaso, ora aumentando o sminuendo il picciol foro, da cui l' acqua scaturiva: e l' abuso, la venalità e la corruttela giunsero finalmente a tal segno, che la Clepsidra non tramandava più l' acqua con regolarità e giustizia se non per le persone senza credito e senza potere, avvegnacchè i ricchi e i potenti avevano sempre i mezzi di farla correre come più loro piaceva a seconda del proprio interesse.

Non tutte le Clepsidre erano della medesi-

ma

ma capacità, come può inferirsi dalle parole del giovine PLINIO, il quale nell' undecima epistola del Libro secondo così si esprime: *Dixi horis pene quinque: nam duodecim Clepsydris, quas spatiosissimas acceperam, sunt additae quatuor*: dal che si scorge pur anco, che ciascuna di queste sedici Clepsidre era un poco meno di 19 minuti d'ora; se non che essendosi attitata la Causa, di cui PLINIO favella nella citata epistola, nel mese di Gennajo, quando per la brevità de' giorni solevano esser più brevi le ore romane, que' 19. minuti possono per avventura equivalere ai 15, ossia al quarto delle nostre ore volgari. Solevano gli Oratori dimandare ai Giudici un certo numero di Clepsidre per la durata delle loro aringhe, e i più loquaci e molesti ne dimandavano con ostinazione più del dovere, testimonio quel CECILIANO presso MARZIALE, il quale essendo solito a bere dell' acqua in mezzo al discorso per rifocillare le forze, viene pregato dal Poeta a bere l' acqua della Clepsidra per liberar dalla noja i suoi uditori:

Septem Clepsydras magna tibi voce petenti
Arbiter invitus, Caeciliane, dedit.
At tu multa diu dicis: vitreisque tepentem
Ampullis potas semisupinus aquam.
Ut tandem saties vocemque sitimque, rogamus,
Jam de Clepsydra, Caeciliane bibas (a).

Le

(a) Mart. L. VI. Epigr. 35.

Le Clepſidre, di cui qui parliamo, erano in uſo anche all' armata per divider le veglie alle ſentinelle, di che fanno fede gli antichi Scrittori di Tattica; e fra gli altri VEGEZIO dice eſpreſſamente: *vigilias nocturnas in quatuor partes ad Clepſydram diviſas eſſe, ut non amplius quam tribus horis nocturnis neceſſe ſit vigilare* (a): Ed è finalmente memorabile l'oſſervazione fatta da GIULIO CESARE approdato coll' eſercito in *Inghilterra*, dove per mezzo delle Clepſidre ſi aſſicurò, che le notti vi erano più corte che nel continente: *complures praeterea*, dic' egli (*b*), *minores objectae inſulae exiſtimantur, de quibus inſulis nonnulli ſcripſerunt, dies continuos XXX. ſub bruma eſſe noctem. Nos nihil de eo percunctationibus reperiebamus, niſi quod certis ex aqua menſuris breviores eſſe noctes quam in continente videbamus*.

Per ultimo non è da tralaſciarſi, che anche ne' moderni tempi ſi è fatto talvolta uſo delle Clepſidre da riputatiſſimi Uomini, teſtimonio TICONE BRAHE, che ſe ne valſe per miſurare il moto delle Stelle, e DUDLEY che le miſe in opra nelle ſue marittime oſſervazioni.

SCOLIO II.

290. Nella ſoluzione di queſto Problema ſi è da noi fatto ricorſo al principio, rigoroſa-

 mente

(a) Veget. *De Re Milit.* L. III. C. VIII.
(b) Caes. *De Bell. Gall.* L. V. Cap. VIII.

mente già dimostrato nelle prime proposizioni di questa seconda Parte, che l'acqua uscente dalle picciolissime aperture de' vasi si muove con quella velocità, che acquista un grave nel cadere dall'altezza della colonna sovrastante all' apertura, cioè con una velocità proporzionale alla radice di tale altezza. Siccome però siffatto principio viene dimostrato dopo l'HERMANNO, e il VARIGNON dalla comune degli Scrittori d' Idraulica colla teoria della pressione dell' acqua quiescente, e questi dippiù neppur sembrano fare alcun caso della grandezza del foro, da cui l' acqua scaturisce; sarà opportuno dire qui alcuna cosa intorno a sì astrusa questione, ed indicare l' origine degli abbaglj e paralogismi, in cui tanti sono inciampati per non avere bastantemente distinto nel fluido i due stati essenzialmente diversi, di quiete, e di moto, e per avere argomentato senza la debita circospezione dall' uno all' altro stato.

Ora la dottrina delle forze acceleratrici ci insegna, che l' integrale della forza moltiplicata per l' elemento del tempo, per cui dura la sua azione, rappresenta la velocità generata in un dato tempo finito; e l' integrale della forza moltiplicata per l' elemento dello spazio, pel quale essa accelera il mobile, esprime il quadrato della velocità generata alla fine d' un dato spazio finito. Quindi se quella forza o pressione, che incalza nel principio del moto ciascuna

cuna particella del fluido, persistesse costante per un certo tempo, e nel momento ultimo di tal tempo cessasse di agire; oppure si cangiasse per tutto quel tempo in maniera, che in tutti i successivi istanti corrispondenti fosse sempre proporzionale alla pressione iniziale; in questo supposto la velocità acquistata dalle particelle del fluido uscenti dall' orifizio sarebbe proporzionale alla primitiva pressione, cioè alla semplice altezza dell' acqua sopra l' orifizio, come il P. CASTELLI, uomo altronde benemerito della dottrina pratica delle acque, falsamente credette. Che se la detta forza premente in vece di mantenersi costante per un certo tempo, tale si conservasse per un certo dato spazio, pel quale accelera le particelle del fluido, oppure se cangiandosi per tutti i punti di quello spazio, fosse in ciascun punto corrispondente sempre proporzionale alla forza premente iniziale; allora il quadrato della velocità generata nelle particelle uscenti dal lume sarebbe proporzionale alla pressione primitiva, ovvero all' altezza del fluido sovra il lume, che è appunto la proporzione da noi già rigorosamente dimostrata ne' piccioli fori, e confermata dall' esperienza. Ma in primo luogo sembra evidente, che la pressione iniziale non si conserva la stessa in tutti i momenti di quel tempo, nè la stessa ne' varj punti di quello spazio: Le particelle del fluido non acquistano in un istante

di tempo dalla preſſione, che è una forza morta, quella velocità, con cui ſi ſcagliano dal lume, ma la acquiſtano a poco a poco e per gradi a guiſa de' corpi gravi, che diſcendono per l'azione della gravità. Uſcendo le une dopo le altre dal foro, quelle che precedono acquiſtano la loro velocità prima delle poſteriori, dalle quali ſono ſtrette e premute; e quindi ſi ſcoſtano da queſte un tantino, e conſeguentemente reſtano un po' meno premute, e così di mano in mano va più e più creſcendo lo ſcoſtamento, e ſcemando la preſſione fino a che queſta ſvaniſce interamente quando le particelle hanno acquiſtata tutta la velocità, che loro compete. Ora oltre ad eſſere ignoto il tempo e lo ſpazio, pel quale le particelle antecedenti ſi allontanano dalle ſuſſeguenti fino al punto di ſottrarſi all'azione della forza premente, è totalmente ignota la proporzione, con cui ne' punti diverſi di detto ſpazio va indebolendoſi la forza acceleratrice. Oltre a ciò qualora le preſſioni iniziali, ovvero le altezze del fluido ſopra il lume ſieno diverſe, non ſi ſa, ſe lo ſpazio, pel quale le particelle ſi accelerano, ſia lo ſteſſo in ambe le altezze; molto meno poi ſi ſa, ſe eſſendo differente queſto ſpazio nelle due altezze, le forze prementi le particelle del fluido ſi ſminuiſcano talmente, che i due integrali delle forze moltiplicate per gli elementi de' due riſpettivi ſpazj, e computati dal princi-

pio

pio al fine di detti spazj risultino proporzionali alle due pressioni iniziali; senza la qual condizione le velocità generate nelle particelle del fluido non possono essere in alcun conto proporzionali alle radici delle altezze. Da tutto ciò si fa manifesto, che il principio delle pressioni, come si adopra comunemente dagli Scrittori d' Idrodinamica, non è una guida sicura per giugnere all' esatta dimostrazione del Teorema, che le velocità dell' acqua nell' uscire dalle picciole aperture de' recipienti seguitano la ragione sudduplicata delle altezze sopra le aperture.

PROBLEMA LII.

291. *Cercasi la quantità d' acqua, che esce in un dato tempo* t *da un foro circolare verticale fatto in una delle pareti del vaso* BDEC (Fig. 49). Fig. 49.

SOLUZIONE.

È noto dall' Idraulica, che nominando t' il tempo che un grave impiega a cadere da una data altezza a, si ha la quantità d' acqua uscente dall' elemento $GMmg$ dell' area circolare nel tempo $t = \frac{2t.GMmg.\sqrt{(a.AG)}}{t'}$ (*). Perciò

 posto

(*) Dalla legge dell' accelerazione de' Gravi egli è noto, che $\sqrt{a} : \sqrt{AG} :: t' : \sqrt{\frac{AG}{a}}$ = al tempo della

posto il raggio $FR = 1$, l'arco $FM = u$, e quindi $GM =$ sen. u, $RG =$ cos. u, sarà $GMmg = du$ sen. u^2; e fatta $AR = b$, si avrà $AG = b -$ cos. u. Dunque la predetta quantità d'acqua $= \frac{2tdu \text{ sen.} u^2}{t'} \sqrt{(ab - a \text{ cos.} u)}$ $= \frac{2tdu(1 - \text{cos.} u^2)}{t'} \sqrt{(ab - a \text{ cos.} u)}$. Ora svolta in serie la quantità radicale $\sqrt{(b - \text{cos.} u)}$, si ottiene $b^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}$ cos. $u - \frac{b^{-\frac{3}{2}} \text{cos.} u^2}{8} - \frac{b^{-\frac{5}{2}} \text{cos.} u^3}{16} - \frac{5b^{-\frac{7}{2}} \text{cos.} u^4}{128} -$ ec. Dunque la detta quantità d'acqua risulta $= \frac{2tdu}{t'}(1 - \text{cos.} u^2)\left(b^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}\text{cos.} u -\right.$

b

---

della caduta libera da AG, nel qual tempo colla velocità finale percorre il grave $2AG$, e però il filo d'acqua, che si muove colla velocità dovuta all'altezza AG trascorre equabilmente in quello stesso tempo lo spazio $2AG$, e conseguentemente nel tempo t trascorrerà lo spazio (per l'analogia $t' \sqrt{\frac{AG}{a}} : t :: 2AG : \frac{2t\sqrt{(a.AG)}}{t'}$) espresso da $\frac{2t\sqrt{(a.AG)}}{t'}$. Dunque finalmente la quantità d'acqua uscente dall'elemento $GMmg$ nel tempo t è appunto $= \frac{2t \cdot GMmg \cdot \sqrt{(a.AG)}}{t'}$.

$$\frac{b^{-\frac{3}{2}}\cos.u^2}{8}-\frac{b^{-\frac{5}{2}}\cos.u^3}{16}-\frac{5b^{-\frac{7}{2}}\cos.u^4}{128}$$

$$-\text{ec.}\Big)\sqrt{a}=\frac{2tdu}{t'}\sqrt{ab}-\frac{tdu}{t'}\cos.u\sqrt{\frac{a}{b}}-$$

$$\frac{t}{4t'}du\cos.u^2\sqrt{\frac{a}{b^3}}-\frac{t}{8t'}du\cos.u^3\sqrt{\frac{a}{b^5}}-$$

$$\frac{5t}{64t'}du\cos.u^4\sqrt{\frac{a}{b^7}}-\text{ec.}\ldots-\frac{2t}{t'}du\cos.u^2\sqrt{ab}$$

$$+\frac{t}{t'}du\cos.u^3\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{t}{4t'}du\cos.u^4\sqrt{\frac{a}{b^3}}+$$

$$\frac{t}{8t'}du\cos.u^5\sqrt{\frac{a}{b^5}}+\frac{5t}{64t'}du\cos.u^6\sqrt{\frac{a}{b^7}}+$$

$$\text{ec.}=\frac{2t}{t'}du\,\text{fen}.u^2\sqrt{ab}-\frac{t}{t'}du\cos.u\,\text{fen}.u^2\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$-\frac{t}{4t'}du\cos.u^2\,\text{fen}.u^2\sqrt{\frac{a}{b^3}}-\frac{t}{8t'}du\cos.u^3\times$$

$$\text{fen}.u^2\sqrt{\frac{a}{b^5}}-\frac{5t}{64t'}du\cos.u^4\,\text{fen}.u^2\sqrt{\frac{a}{b^7}}-\text{ec.}$$

$$=\frac{t\sqrt{ab}}{t'}\Big(2du\,\text{fen}.u^2-\frac{du\cos.u\,\text{fen}.u^2}{b}-$$

$$\frac{du\cos.u^2\,\text{fen}.u^2}{4b^2}-\frac{du\cos.u^3\,\text{fen}.u^2}{8b^3}-$$

$$\frac{5du\cos.u^4\,\text{fen}\,u^2}{64b^4}-\text{ec.}\Big).$$ Ora dal calcolo integrale è manifesto, che, integrati tutti i termini della serie, nasce

1.° $\int du\,\text{fen}.u^2 = -\frac{1}{2}\cos.u\,\text{fen}.u+\frac{1}{2}u$

2.° $\int du\cos.u\,\text{fen}.u^2 = \frac{1}{3}\,\text{fen}.u^3$

$$3.^{\circ} \int du \cos.u^2 \, \text{sen}.u^2 = \tfrac{1}{4} \, \text{sen}.u^3 \cos.u + \tfrac{1}{4} \int du \, \text{sen}.u^2$$

$$= \tfrac{1}{4} \, \text{sen}.u^3 \cos.u - \tfrac{1}{8} \cos.u \, \text{sen}.u + \tfrac{1}{8} u$$

$$4.^{\circ} \int du \cos.u^3 \, \text{sen}.u^2 = \tfrac{1}{5} \, \text{sen}.u^3 \cos.u^2 + \tfrac{2}{15} \, \text{sen}.u^3$$

$$5.^{\circ} \int du \cos.u^4 \, \text{sen}.u^2 = \tfrac{1}{6} \, \text{sen}.u^3 \cos.u^3 + \tfrac{1}{8} \, \text{sen}\, u^3 \cos.u$$

$$+ \tfrac{1}{8} \int du \, \text{sen}.u^2 =$$

$$\tfrac{1}{6} \, \text{sen}.u^3 \cos.u^3 + \tfrac{1}{8} \, \text{sen}.u^3 \cos.u - \tfrac{1}{16} \cos u \, \text{sen}.u + \tfrac{1}{16} u .$$

Quindi la quantità d'acqua uscente dal segmento FGM nel tempo t sarà

$$= \frac{t\sqrt{ab}}{t'} \Big(u - \cos.u \, \text{sen}.u - \frac{\text{sen}.u^3}{3b} - \frac{2\,\text{sen}.u^3 \cos.u - \text{sen}.u \cos.u + u}{32b^2} - \frac{3\,\text{sen}.u^3 \cos.u^2 + 2\,\text{sen}.u^3}{120b^3} - \frac{\tfrac{5}{6}\text{sen}.u^3 \cos.u^3 + \tfrac{5}{8}\text{sen}\,u^3 \cos.u - \tfrac{5}{16}\cos.u \, \text{sen}.u + \tfrac{5}{16}u}{64b^4}$$

$$- \text{ec.} \Big) + \text{Cost.}$$

; e dovendo svanire quest'integrale insieme coll'arco u, si ricava Cost. $= 0$; e fatta $1 : \pi$ la ragione del diametro alla periferia del cerchio, e però la circonferenza $FPM = 2\pi$, risulterà l'acqua, che sgorga da tutto il

il foro circolare nel tempo $t = \frac{2t\pi \surd ab}{t'} \times \left(1 - \frac{1}{32b^2} - \frac{5}{1024b^4} - \text{ec.}\right)$, che è una serie convergentissima, come apparisce. Dunque ec. Il che era ec.

COROLLARIO I.

292. Se il foro circolare arriva all' orlo del vaso, cioè se $b = 1$, l'equazione differenziale $\frac{2tdu}{t'}$ sen.$u^2 \surd(a - a \cos. u)$ ammette integrazione algebraica, poichè fatto $\surd(1 + \cos. u) = x$, si ha du sen. $u = - 2xdx$, sen. $u = x\surd(2 - x^2)$, cos. $u = x^2 - 1$, $\surd(1 - \cos. u) = \surd(2 - x^2)$; dunque du sen.$u^2 \times \surd(1 - \cos. u) = - 2x^2dx(2 - x^2) = 2x^4dx - 4x^2dx$; e l' integrale $= \frac{2}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 = \frac{2}{5}(1 + \cos. u)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(1 + \cos. u)^{\frac{3}{2}}$ + Cost. E dovendo svanire l' integrale, quando è $u = 0$, nasce Cost. $= \frac{4}{3}\surd 8 - \frac{2}{5}\surd 32 = \frac{8}{15}\surd 8 = \frac{16}{15}\surd 2$. Dunque la quantità d' acqua in tal caso è $= \frac{2t\surd a}{t'} \times \left(\frac{2}{5}(1 + \cos. u)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(1 + \cos. u)^{\frac{3}{2}} + \frac{16}{15}\surd 2\right)$. E però posto $u = \pi$, cioè alla semicirconferenza, si avrà l' acqua uscente dal se-

femiforo $= \frac{32t\sqrt{2a}}{15t'}$, e da tutto il foro $=$ $\frac{64t\sqrt{2a}}{15t'}$.

COROLLARIO II.

293. Per trovare in questo stesso caso l'acqua uscente da un foro rettangolare uguale al circolare, ed avente il lato verticale uguale al diametro del cerchio, e l'orizzontale uguale al quadrante, è chiaro, che l'elemento del rettangolo sarà $= \frac{1}{2}\pi dx$, e l'acqua uscente da esso nel tempo t sarà $= \frac{t\pi dx\sqrt{ax}}{t'}$, il di cui integrale $= \frac{2t\pi\sqrt{ax^3}}{3t'}$, e però posto $x = 2$, l'acqua, che esce da tutto il rettangolo trovasi $= \frac{4t\pi\sqrt{2a}}{3t'}$. Sta dunque l'acqua del cerchio a quella del rettangolo come $\frac{64}{15} : \frac{4\pi}{3} :: \frac{16}{5} : \pi :: \frac{16}{5} : \frac{22}{7} :: \frac{8}{5} : \frac{11}{7} :: 56 : 55$.

COROLLARIO III.

294. Nel primo caso, che il foro circolare sia immerso sotto la superficie, se si suppone il predetto foro rettangolare alla medesima profondità, si trova, che l'altezza dell'acqua sopra l'elemento $\frac{1}{2}\pi dx$ è $= b - 1 + x$; dun-

dunque l' acqua, che esce dal detto elemento $= \frac{t\pi dx}{t'} \sqrt{(ab - a + ax)}$, e l' integrale $= \frac{2t\pi a^{\frac{1}{2}} (b - 1 + x)^{\frac{3}{2}}}{3t'} +$ Cost. Ora dovendo svanire l' integrale quando è $x = 0$, si ricava Cost. $= - \frac{2t\pi a^{\frac{1}{2}} (b - 1)^{\frac{3}{2}}}{3t'}$; e però l' integrale $= \frac{2t\pi a^{\frac{1}{2}}}{3t'} \left((b - 1 + x)^{\frac{3}{2}} - (b - 1)^{\frac{3}{2}} \right)$: e finalmente posta $x = 2$, risulta l' acqua, che sgorga da tutto il foro rettangolare $= \frac{2t\pi a^{\frac{1}{2}}}{3t'} \left((b + 1)^{\frac{3}{2}} - (b - 1)^{\frac{3}{2}} \right)$

$$= \frac{2t\pi a^{\frac{1}{2}}}{3t'} \left(b^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{2} b^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2} - 1) b^{-\frac{1}{2}}}{2} \right.$$

$$+ \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2} - 1)(\frac{3}{2} - 2)}{2 \cdot 3} b^{-\frac{3}{2}} +$$

$$\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2} - 1)(\frac{3}{2} - 2)(\frac{3}{2} - 3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} b^{-\frac{5}{2}} + \text{ec.}$$

$$\ldots\ldots - b^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{2} b^{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2} - 1)}{2} b^{-\frac{1}{2}} +$$

$\frac{3}{2}($

$$+ \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)}{2 \cdot 3} b^{-\frac{3}{2}} -$$

$$\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)(\frac{3}{2}-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} b^{-\frac{5}{2}} + \text{ec.} \Big)$$

$$= \frac{2t\pi \sqrt{ab}}{t'} \left(1 - \frac{1}{24b^2} - \text{ec.} \right).$$ Dal che si vede, che quanto più b supera il raggio del cerchio, cioè 1, ovvero quanto più i fori si sprofonderanno sotto la superficie, tanto più si avvicinano le quantità d'acqua erogata da ambedue i fori.

COROLLARIO IV.

295. Tornando al caso di prima, che i fori radano l'orlo del vaso, l'acqua del foro circolare sta all'acqua del foro quadrato, che ha il lato uguale al diametro del cerchio, come $4:5$; imperciocchè essendo l'elemento del quadrato $= 2dx$, e l'altezza dell'acqua sopra di quest'elemento $= x$, ne risulta la quantità d'acqua uscente dal detto elemento nel tempo t $= \frac{4tdx \sqrt{ax}}{t'}$, che ha per integrale $\frac{8ta^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3t'}$, e posto $x = 2$, trovasi l'acqua erogata da tutto il foro quadrato $= \frac{16t\sqrt{2a}}{3t'}$. Dunque l'acqua del foro circolare sta a quella del quadrato come $\frac{64}{15} : \frac{16}{3} :: \frac{4}{5} : 1 :: 4 : 5$.

CO-

COROLLARIO V.

296. Sia il foro $ACDB$ (Fig. 50) formato dall' acrco AC dell' iperbola equilatera, dalle due ordinate orizzotali AB, CD all' asintoto, e dalla porzione BD verticale dello stesso asintoto: cercasi la quantità d' acqua, che uscirà nel tempo t da tal foro. Chiamata $EB = b$, $FB = e =$ all' altezza dell' acqua sopra la cima del foro, $CD = c$; si ha l' elemento del foro $= ydx = \frac{dx}{b+x}$, computando le ascisse da B. Dunque la quantità d' acqua uscente dal detto elemento nel tempo t sarà $= \frac{2tdx\sqrt{(ae+ax)}}{t'(b+x)}$. Pongasi ora $\sqrt{(ae+ax)} = v$, $ax = v^2 - ae$, $dx = \frac{2vdv}{a}$, $b + x = \frac{v^2+ab-ae}{a}$, e però $\frac{2tdx\sqrt{(ae+ax)}}{t'(b+x)} = \frac{4tv^2dv}{t'(v^2+ab-ae} =$ $\frac{4t}{t'}dv - \frac{4t}{t'}\left(ab - ae\right)\frac{dv}{v^2+ab-ae}$:

Fig. 50.

1.° Ora l' integrale di questa formola nel caso che $b > e$, cioè che la superficie dell' acqua sia più bassa dell' asintoto orizzontale, è $\frac{4t}{t'}v$

$$- \frac{4t}{t'}\left(ab - ae \right)^{\frac{1}{2}}\int\frac{dv:(ab-ae)^{\frac{1}{2}}}{\frac{v^2}{ab-ae}+1}$$

$=$

$= \frac{4t}{t'}v - \frac{4t}{t'}(ab - ae)^{\frac{1}{2}} \times$ Arc. tang. $\frac{v}{\sqrt{(ab-ae)}}$ + Cost. $=$ $\frac{4t}{t'}\sqrt{(ae + ax)} - \frac{4t}{t'}\sqrt{(ab - ae)} \times$ Arc. tang. $\sqrt{\frac{e+x}{b-e}}$ + Cost. Ma perchè dee svanire l' integrale quando è $x = o$, si ha Cost. $= - \frac{4t}{t'}\sqrt{ae} + \frac{4t}{t'}\sqrt{(ab - ae)} \times$ Arc. tang. $\sqrt{\frac{e}{b-e}}$. Dunque la quantità d' acqua, che esce dalla parte indeterminata del detto foro corrispondente alla indefinità x, è $=$ $\frac{4t}{t'}\left(\sqrt{(ae+ax)} - \sqrt{ae}\right) + \frac{4t}{t'}\sqrt{(ab - ae)} \times$ (Arc. tang. $\sqrt{\frac{e}{b-e}}$ $-$ Arc. tang. $\sqrt{\frac{e+x}{b-e}}$).

Egli è poi noto, essere Arc. tang. $\sqrt{\frac{e}{b-e}}$ $-$ Arc. tang. $\sqrt{\frac{e+x}{b-e}} =$

$$\text{Arc. tang. } \frac{\sqrt{\frac{e}{b-e}} - \sqrt{\frac{e+x}{b-e}}}{1 + \frac{\sqrt{(e^2+ex)}}{b-e}} =$$

$$\text{Arc. tang. } \frac{\sqrt{(eb-e^2)} - \sqrt{(be-e^2+bx-ex)}}{b-e+\sqrt{(e^2+ex)}}.$$

Dun-

Dunque l' acqua fuddetta farà $=$
$\frac{4t}{t'}\left(\sqrt{(ae+ax)}-\sqrt{ae}\right)+\frac{4t}{t'}\sqrt{(ab-ae)}\times$
Arc. tang. $\frac{\sqrt{(eb-e^2)}-\sqrt{(be-e^2+bx-ex)}}{b-e+\sqrt{(e^2+ex)}}$;
nella qual formola mettendo BD in luogo di x, cioè $\frac{1-bc}{c}$, fi ottiene la quantità d' acqua ufcente da tutto il foro.

2.° Che fe foffe $b < e$, cioè la fuperficie dell' acqua più alta dell' afintoto orizzontale; allora fatto $ae-ab=f^2$, farebbe $\frac{dv}{v^2+ab-ae}$
$=\frac{dv}{v^2-f^2}=\frac{dv}{2f(v-f)}-\frac{dv}{2f(v+f)}$.
Dunque $\frac{4tdv}{t'}-\frac{4t}{t'}(ab-ae)\times$
$\frac{dv}{v^2+ab-ae}=\frac{4tdv}{t'}+\frac{2t}{t'}\sqrt{(ae-ab)}\times$
$\left(\frac{dv}{v-\sqrt{(ae-ab)}}-\frac{dv}{v+\sqrt{(ae-ab)}}\right.$; e l' integrale $=\frac{4tv}{t'}+\frac{2t}{t'}\sqrt{(ae-ab)}\times$
log. $\frac{v-\sqrt{(ae-ab)}}{v+\sqrt{(ae-ab)}}$ + Coft. $=\frac{4t}{t'}\times$
$\sqrt{(ae+ax)}+\frac{2t}{t'}\sqrt{(ae-ab)}\times$
log.

$$\log. \frac{\sqrt{(ae+ax)} - \sqrt{(ae-ab)}}{\sqrt{(ae+ax)}+\sqrt{(ae-ab)}} + \text{Cost.}$$

Quindi trovasi Cost. $= - \frac{4t}{t'}\sqrt{ae} - \frac{2t}{t'}\times \sqrt{(ae-ab)} \times \log. \frac{\sqrt{ae}-\sqrt{(ae-ab)}}{\sqrt{ae}+\sqrt{(ae-ab)}}$:

Dunque la quantità d'acqua uscente dalla porzione indefinita del foro è $= \frac{4t}{t'}\sqrt{(ae+ax)} + \frac{2t}{t'}\sqrt{(ae-ab)} \times$

$$\log. \frac{[\sqrt{(e+x)}-\sqrt{(e-b)}][\sqrt{e}+\sqrt{(e-b)}]}{[\sqrt{(e+x)}+\sqrt{(e-b)}][\sqrt{e}-\sqrt{(e-b)}]}$$

$$= \frac{4t}{t'}\sqrt{(ae+ax)} + \frac{2t}{t'}\sqrt{(ae-ab)} \times$$

$$\log. \frac{[2e+x-b-2\sqrt{(e+x)}\sqrt{(e-b)}][2e-b+2\sqrt{(e^2-eb)}]}{b\,(x-b)}.$$

3.° Ma se fosse $b = e$, cioè la superficie dell'acqua giugnesse appunto all'asintoto orizzontale, allora la quantità d'acqua sarebbe $= \frac{4tv}{t'} = \frac{4t}{t'}\sqrt{(ae+ax)} + \text{Cost.} = \frac{4t}{t'}\left(\sqrt{(ae+ax)} - \sqrt{ae}\right)$.

COROLLARIO VI.

Fig. 51. 297. Sia il foro parabolico NBF (*Fig.* 51), e

e l'altezza dell'acqua AB sopra il vertice della parabola situata coll'asse verticale sia $= b$, sicchè la quantità d'acqua uscente dall'elemento del semiforo nel tempo t sia $= \frac{2tydx\sqrt{a(b+x)}}{t'} =$ (posto il parametro $= p$) $\frac{2tdx\sqrt{(abpx+apx^2)}}{t'}$. E se la superficie dell'acqua stasse al disotto del vertice B come in M, allora b si convertirebbe in $-b$, e la formola predetta sarebbe $\frac{2tdx}{t'}\sqrt{(apx^2-abpx)}$; e quindi in tutti e due questi casi l'espressione generale sarebbe $\frac{2tdx}{t'}\sqrt{(apx^2 \pm abpx)}$, il di cui integrale dipende, come si sa, dalla quadratura dell'iperbola, e si prende in modo, che svanisca quando è $x = 0$ nel 1.° caso, e quando $x = b$ nel secondo. Ma se fosse $b = 0$, cioè la superficie dell'acqua arrivasse appunto alla cima del foro, si avrebbe per la quantità elementare di acqua $\frac{2t}{t'}xdx\sqrt{ap}$, la quale integrata dà $\frac{tx^2\sqrt{ap}}{t'} = \frac{txy\sqrt{ax}}{t'}$, e il doppio dà l'acqua per tutta la parabola indefinita corrispondente all'indeterminata x.

COROLLARIO VII.

298. Se il foro è triangolare colla base orizzontale all' ingiù $= c$, e colla punta diſtante dalla superficie dell' acqua per l' intervallo h, e l' altezza del triangolo ſia $= k$; allora prendendo per x le diſtanze della punta dagli elementi del triangolo, trovaſi l' elemento $= \frac{cxdx}{k}$. Dunque l' acqua uscente dal detto elemento nel tempo t sarà $= \frac{2tcxdx}{t'k} \sqrt{(ah + ax)}$. Ed integrando ſi avrà l' acqua scaricata pel foro triangolare indeterminato di altezza $x = \frac{2tc\sqrt{a}}{t'k} \times \frac{2}{15}(3x - 2h)(x + h)^{\frac{3}{2}} +$ Coſt. $= \frac{8tch^2\sqrt{ah}}{15t'k} + \frac{4tca^{\frac{1}{2}}}{15t'k}(3x - 2h) \times (x + h)^{\frac{3}{2}}$, dove mettendo k in vece di x ſi ottiene la quantità d' acqua per tutto il foro propoſto $= \frac{8tch^2\sqrt{ah}}{15t'k} + \frac{4tca^{\frac{1}{2}}}{15t'k}(3k - 2h) \times (k + h)^{\frac{3}{2}}$.

1° E se ſi suppone, che il vertice di detto foro triangolare ſia sulla superficie dell' acqua, cosicchè $h = 0$, ſi ha la detta quantità d' acqua $= \frac{4tck\sqrt{ak}}{5t'}$.

2°

2°. Paragonisi ora questa quantità con quella che versa nell'istesso tempo un foro parallelogrammo uguale al precedente, ed avente un lato nella superficie dell'acqua, e questo lato uguale alla metà della base del triangolo, e l'altezza in conseguenza la medesima con esso. Sarà dunque l'elemento di detto parallelogrammo $= \frac{1}{2}cdx$, e quindi la quantità d'acqua di esso elemento $= \frac{tcdx \sqrt{ax}}{t'}$, e però il suo integrale $= \frac{2tcx \sqrt{ax}}{3t'}$, e per tutto il parallelogrammo $= \frac{2tck \sqrt{ak}}{3t'}$. Sta dunque l'acqua del foro triangolare a quella del parallelogrammo uguale come sta $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} :: 6 : 5$.

CO ROLLARIO VIII.

299. Ma se il detto foro triangolare ha la punta all'ingiù, e la base orizzontale all'insù, allora chiamata h la distanza della base dalla superficie dell'acqua, x la distanza dell'elemento dalla medesima, ne viene l'elemento $= \frac{c(k-x)dx}{k}$. Perciò l'acqua versata da questo elemento nel tempo $t = \frac{2tc(k-x)dx\sqrt{(ah+ax)}}{kt'}$, ed integrando risulta l'acqua versata dalla porzione indefinita del foro $= \frac{4tca^{\frac{1}{2}}}{15kt'}(5k+2h-3x)\times$

$(h + x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4tca^{\frac{1}{2}}}{15\,kt'}(5k + 2h)h\sqrt{h}$, e sostituendo k per x, si ha l'acqua versata da tutto il foro nel predetto tempo $= \frac{8tca^{\frac{1}{2}}}{15\,kt'}(k + h)^{2} \times (k + h)^{\frac{1}{2}} - \frac{4tca^{\frac{1}{2}}}{15\,kt'}(5k + 2h)h\sqrt{h}$.

1°. Supposto $h = 0$, cioè la base del triangolo nella superficie dell'acqua, risulta l'acqua versata $= \frac{8tck\sqrt{ak}}{15t'}$.

2°. Dunque sta l'acqua versata da questo triangolo in un dato tempo a quella, che versa il medesimo in una situazione opposta (nell' ipotesi di $h = 0$) come sta $\frac{8}{15} : \frac{4}{5} :: 2 : 3$.

SE-

SEZIONE X.

Del tempo, che mettono i vasi o le Clepsidre a vuotarsi del liquido contenuto.

300. È noto, che chiamato g lo spazio di piedi parigini 15 $\frac{1}{12}$, da cui cade liberamente un grave nel tempo di 1″, ed a un'altezza qualunque, dall'analogia $\sqrt{g} : \sqrt{a} :: 2g : 2\sqrt{ga}$ si ha il quarto termine $2\sqrt{ga}$, che esprime lo spazio trascorso con moto equabile nello stesso tempo di 1″ colla velocità dovuta all'altezza a, cioè acquistata cadendo liberamente da a. Quindi essendo nel moto equabile gli spazj proporzionali ai tempi allorchè le velocità sono uguali, si avrà $1'' : t :: 2\sqrt{ga} : 2t\sqrt{ga}$ = allo spazio descritto equabilmente nel tempo t (dato in secondi) colla velocità dovuta all'altezza a. Ciò supposto

PROBLEMA LIII.

301. *Cercasi il tempo, che impiega a vuotarsi un vaso qualunque prismatico, oppur cilindrico per un dato foro praticato nel fondo o nella sua base.*

SOLUZIONE.

Sia a l'altezzza del prisma, B la base,

F il foro, e sia l'acqua, che va vuotandosi, giunta alla distanza x dal fondo. Siccome l'acqua esce dal foro F colla velocità dovuta all' altezza x, una gocciola di questo fluido scorrerà nel tempuscolo infinitesimo dt lo spazio $2dt\sqrt{gx}$, e la quantità uscente in quel tempuscolo sarà $2Fdt\sqrt{gx}$: ma l'acqua discende intanto nel vaso per lo spazio $-dx$; si avrà dunque $-Bdx = 2Fdt\sqrt{gx}$, e però $dt = -\frac{Bx^{-\frac{1}{2}}dx}{2F\sqrt{g}}$, e integrando $t = -\frac{B}{F}\sqrt{\frac{x}{g}} + \text{Cost.} = \frac{B}{F}\left(\sqrt{\frac{a}{g}} - \sqrt{\frac{x}{g}}\right)$, dovendo svanire t, allorchè $x = a$. Ora se si pone $x = 0$, si ha il tempo dell' intero vuotamento $t = \frac{B}{F}\sqrt{\frac{a}{g}}$. Il che era ec.

PROBLEMA LIV.

302. *Cercasi il tempo del vuotamento d'un vaso qualunque piramidale, oppur conico per un lume aperto nel fondo.*

SOLUZIONE.

Ritenute le denominazioni precedenti, e fatta $a^2 : (a-x)^2 :: B : \frac{B(a-x)^2}{a^2} =$ alla superficie dell' acqua discesa per l'altezza $a-x$. Dunque $2Fdt\sqrt{gx} = -\frac{B(a-x)^2 dx}{a^2}$, e

e quindi $dt = -\frac{B}{2Fa^2\sqrt{g}}(a-x)^2 x^{-\frac{1}{2}}dx$
$= -\frac{B}{2Fa^2\sqrt{g}}(a^2x^{-\frac{1}{2}} - 2ax^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}})dx.$
Presi gl' integrali trovasi $t = -\frac{B}{2Fa^2\sqrt{g}} \times$
$(2a^2x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}ax^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}})$ + Cost. E si trova la costante $= \frac{B}{2Fa^2\sqrt{g}} \times \frac{16}{15}a^2\sqrt{a} =$
$\frac{8B}{15F}\sqrt{\frac{a}{g}}$. Dunque $t = \frac{8B}{15F}\sqrt{\frac{a}{g}} - \frac{B}{2Fa^2\sqrt{g}} \times$
$(2a^2\sqrt{x} - \frac{4}{3}ax\sqrt{x} + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x})$. E per l' intero vuotamento, $t = \frac{8B}{15F}\sqrt{\frac{a}{g}}$. Il che era ec.

COROLLARIO

303. Dunque supposti i fori uguali, il tempo del vuotamento del prisma, o anche cilindro sta al tempo del vuotamento della piramide, o anche cono inscritto, cioè di egual base ed altezza, come sta $15 : 8$.

PROBLEMA LV.

304. *Si cerca il tempo del vuotamento d' un vaso qualunque piramidale o conico per un foro orizzontale fatto nella punta.*

SOLUZIONE.

Ritenute le medesime denominazioni di prima, e chiamata di più b la distanza della punta dal foro, si ha $a^2 : x^2 :: B : \frac{Bx^2}{a^2}$. E però $-\frac{Bx^2 dx}{a^2} = 2Fdt\sqrt{g(x-b)}$, essendo $x-b$ l'altezza dell'acqua sopra il lume. Dunque $dt = -\frac{B}{2Fa^2\sqrt{g}}(x-b)^{-\frac{1}{2}}x^2 dx$. Per integrare quest'equazione pongasi $x-b=v$, e si avrà $dt = -\frac{B}{2Fa^2\sqrt{g}}(v+b)^2 v^{-\frac{1}{2}}dv$. Perciò $t = -\frac{B}{2Fa^2\sqrt{g}} \times (2b^2\sqrt{(x-b)} + \frac{4}{3}b(x-b)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(x-b)^{\frac{5}{2}}) +$ Cost. In conseguenza svanendo t allorchè $x=a$, sarà $t = \frac{B\sqrt{(a-b)}}{2Fa^2\sqrt{g}} \times (2b^2 + \frac{4}{3}b(a-b) + \frac{2}{5}(a-b)^2) - \frac{B\sqrt{(x-b)}}{2Fa^2\sqrt{g}}(2b^2 + \frac{4}{3}b(x-b) + \frac{2}{5}(x-b)^2)$ $= \frac{B\sqrt{(a-b)}}{30Fa^2\sqrt{g}}(16b^2 + 8ab + 6a^2) - \frac{B\sqrt{(x-b)}}{30Fa^2\sqrt{g}}(16b^2 + 8bx + 6x^2)$.

Se

Se pertanto si assume $x = b$, si ottiene il tempo dell'intiero vuotamento $t = \frac{B\sqrt{(a-b)}}{30Fa^2\sqrt{g}} \times (16\,b^2 + 8\,ab + 6\,a^2)$. Il che era ec.

COROLLARIO

305. Supposto b assai picciolo, così che possa trascurarsi, si ha $t = \frac{B\sqrt{\frac{a}{g}}}{5F}$; e però il tempo del vuotamento d' un vaso piramidale per un picciol foro aperto nel fondo sta al tempo del vuotamento per un ugual foro verso la cima come sta $\frac{8}{15} : \frac{1}{5}$, ovvero $8 : 3$.

PROBLEMA LVI.

306. *Trovare l' espressione generale del tempo, che mette a vuotarsi un vaso rotondo, o generato per rotazione.*

SOLUZIONE.

Dalla curva BNE (Fig. 52) rotata intorno all' asse verticale AB si genera il vaso rotondo, che per un picciol foro in B si vuota del liquido, che lo riempie fino ad AE. Conservando le precedenti denominazioni, e chiamata MN y, ed $1 : \pi$ il rapporto del diametro alla periferia del cerchio, nasce la sezione orizzontale del vaso per $MN = \pi y^2$, e quindi

Fig. 52.

quindi $-\pi y^2 dx =$ alla quantità d' acqua uscente dal foro nel tempuscolo dt, la quale poichè è $2Fdt\sqrt{gx}$, ne risulta $-\pi y^2 dx = 2Fdt\sqrt{gx}$, e conseguentemente $dt = -\frac{\pi y^2 dx}{2F\sqrt{gx}}$, e $t = -\int\frac{\pi y^2 dx}{2F\sqrt{gx}} +$ Cost. Il che era ec.

SCOLIO.

307. L'equazione della Curva generatrice esprimendo y per una funzione di x somministrerà l' integrale ricercato, e quindi il valore di t, qualora si pigli l' integrale per modo, che svanisca allorchè $x = a$, e riceva il suo valore completo quando $x = o$.

ESEMPIO I.

308. Nella parabola Apolloniana, dove $y^2 = px$ (preso p pel parametro) si ha $t = -\int\frac{\pi p x^{\frac{1}{2}} dx}{2F\sqrt{g}} +$ Cost. $= \frac{\pi pa}{3F}\sqrt{\frac{a}{g}} - \frac{\pi px}{3F}\sqrt{\frac{x}{g}}$. E posto $x = o$, il tempo t dell' intero vuotamento nasce $= \frac{\pi pa}{3F}\sqrt{\frac{a}{g}}$.

COROLLARIO.

309. Il cilindro circoscritto al conoide parabolico ed avente nel fondo la stessa luce col conoide ricerca tre volte più di tempo a vuotarsi: imperciocchè il tempo del vuotamento in esso

esso è $\frac{B}{F}\sqrt{\frac{a}{g}}$, ed essendo $B = \pi . AE^2 = \pi pa$, il predetto tempo risulta $= \frac{\pi pa}{F}\sqrt{\frac{a}{g}}$, che è appunto triplo del precedente.

ESEMPIO II.

310. Supposto il vaso un' ellissoide coll' asse maggiore $= a$, e il suo parametro $= p$, si ha $y^2 : ax - x^2 :: p : a$, cioè $y^2 = \frac{p}{a} \times (ax - x^2)$. Dunque $t = - \int \frac{\pi p}{2aF\sqrt{g}} \times (ax - x^2) x^{-\frac{1}{2}} dx +$ Cost. $= - \frac{\pi p}{2aF\sqrt{g}} \left(\frac{2}{3} ax^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) + \frac{2\pi pa}{15F}\sqrt{\frac{a}{g}}$; e però tutto il tempo, che passa a vuotarsi l' intera ellissoide sarà $= \frac{2\pi pa}{15F}\sqrt{\frac{a}{g}}$.

COROLLARIO.

311. Se siavi un vaso cilindrico circoscritto alla detta ellissoide, ed abbia lo stesso foro nel fondo, il tempo, che questo mette a vuotarsi, cioè $\frac{B}{F}\sqrt{\frac{a}{g}}$, diventa $\frac{\pi pa}{4F}\sqrt{\frac{a}{g}}$, per essere $B = \frac{1}{4}\pi pa$; e perciò sta il tempo, in cui si vuota l'ellissoide, al tempo, in cui si vuota il

il cilindro circoscritto come $\frac{2}{15}$: $\frac{1}{4}$, ovvero come 8 : 15.

ESEMPIO III.

312. Quando il vaso sia un iperboloide, il di cui asse trasverso $= a$, poichè si ha $y^2 : ax + x^2 :: p : a$, cioè $y^2 = \frac{p}{a}(ax + x^2)$, si avrà $t = -\int \frac{\pi p(ax + x^2)x^{-\frac{1}{2}}dx}{2aF\sqrt{g}} +$ Cost. Supponendo ora, che l'acqua incominci ad uscire, quando è $x = b$, sarà $t = -\frac{\pi p}{2aF\sqrt{g}}(\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}) + \frac{\pi p\sqrt{b}}{2aF\sqrt{g}}(\frac{2}{3}ab + \frac{2}{5}b^2)$; e perciò il tempo del vuotamento intero sarà $t = \frac{\pi p\sqrt{b}}{2aF\sqrt{g}}(\frac{2}{3}ab + \frac{2}{5}b^2) = \frac{\pi pb\sqrt{b}}{2aF\sqrt{g}}(\frac{2}{3}a + \frac{2}{5}b) = \frac{\pi pb\sqrt{b}}{15aF\sqrt{g}}(5a + 3b)$.

COROLLARIO.

313. Nel Cilindro circoscritto a questa iperboloide la base è $\frac{\pi p}{a}(ab + b^2)$, e il tempo dell'intero suo vuotamento per un lume uguale a quello dell'iperboloide è $= \frac{\pi pb(a + b)}{Fa}\sqrt{\frac{b}{g}}$. Dunque il tempo, in cui si vuota l'iperboloide sta

ſta al tempo, in cui ſi vuota il cilindro circoſcritto come ſta $\frac{5a + 3b}{15} : a + b$, ovvero come $\frac{1}{3}a + \frac{1}{5}b : a + b$. Quindi ſuppoſto $b = a$, ſta il primo tempo al ſecondo come $\frac{8}{15}a : 2a$, cioè come $4 : 15$.

ESEMPIO IV.

314. Sia la sfera col diametro a, e però $y^2 = ax - x^2$, e $t = -\int \frac{\pi(ax - x^2)x^{-\frac{1}{2}}dx}{2F\sqrt{g}} + \text{Coſt.} = -\frac{\pi}{2F\sqrt{g}}\left(\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right) + \frac{2\pi a^2}{15F}\sqrt{\frac{a}{g}}$. Dunque il tempo, in cui ſi vuota tutta la sfera è $t = \frac{2\pi a^2}{15F}\sqrt{\frac{a}{g}}$.

COROLLARIO I.

315. Nel cilindro circoſcritto alla sfera, ed avente lo ſteſſo foro nel fondo, ſi ha $B = \frac{\pi a^2}{4}$, e però il tempo del total vuotamento del cilindro ſarà $\frac{\pi a^2}{4F}\sqrt{\frac{a}{g}}$; e conſeguentemente il tempo, in cui ſi vuota la sfera ſta al tempo, in cui ſi vuota il cilindro circoſcritto come $\frac{2}{15} : \frac{1}{4}$, ovvero come $8 : 15$, cioè come i tempi dell' elliſſoide e del cilindro a lei circoſcritto.

Co-

COROLLARIO II.

316. Volendosi il tempo del vuotamento dell'emisfero superiore, basta, che nell'espressione del tempo indefinito $t = \frac{2\pi a^2}{15F}\sqrt{\frac{a}{g}} - \frac{\pi}{2F\sqrt{g}}\left(\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)$ si faccia $x = \frac{1}{2}a$, e si troverà il tempo cercato $= \frac{2\pi a^2}{15F}\sqrt{\frac{a}{g}} - \frac{7\pi a^2}{60F}\sqrt{\frac{a}{2g}} = \frac{\pi a^2}{60F}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(8 - \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$.

COROLLARIO III.

217. Se si cerca il tempo del vuotamento dell'emisfero inferiore, basta, che nell'integrare l'espressione si determini la costante nella supposizione, che l'integrale sparisca quando è $x = \frac{1}{2}a$, e riceva il suo valore completo allorchè diventa $x = 0$, sarà pertanto un tal tempo $= \frac{7\pi a^2}{60F}\sqrt{\frac{a}{2g}}$.

COROLLARIO IV.

318. Dunque il tempo, in cui si vuota l'emisfero superiore sta al tempo, in cui vuotasi l'inferiore come $8 - \frac{7}{\sqrt{2}} : \frac{7}{\sqrt{2}} :: 8 - 4{,}9497 : 4{,}9497 :: 3{,}0503 : 4{,}9497$.

Co-

COROLLARIO V.

319. Il tempo, in cui si vuota tutta la sfera, sta al tempo, in cui si vuota l'emisfero superiore, come sta $8:8-\frac{7}{\sqrt{2}}::80000:30503$, e al tempo, in cui si vuota l'inferiore, come $8:\frac{7}{\sqrt{2}}::80000:49497$.

PROBLEMA LVII.

320. *Ritrovare la curva generatrice d'un vaso, nel quale l'acqua uscente da un picciol foro orizzontale fatto nel vertice vada discendendo talmente, che il tempo della discesa sia come una funzione qualunque della discesa medesima.*

SOLUZIONE.

Essendosi generalmente trovato $dt = -\frac{\pi y^2 dx}{2F\sqrt{gx}}$, se si fa $t = \lambda P$ (presa P per una qualunque funzione della discesa $a-x$), si avrà $dt = \lambda P'dx$, e quindi $-\frac{2\lambda FP'}{\pi}\sqrt{gx} = y^2$. Il che era ec.

ESEMPIO I.

321. Siano per esempio i tempi proporzionali alle discese, cioè $P = a - x$, e però $P' = -1$; risulterà $y^2 = \frac{2\lambda F}{\pi}\sqrt{gx}$, cioè $y^4 =$

$4\lambda^2$

$\frac{4\lambda^2 F^2 gx}{\pi^2}$, che si riferisce alla parabola di quarto grado.

ESEMPIO II.

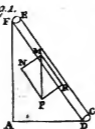
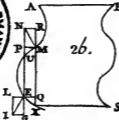
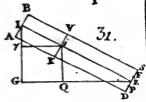
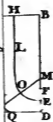
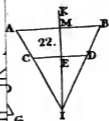
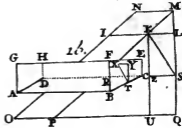
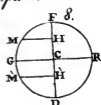
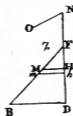
322. Se si pigliano i tempi in proporzione delle potenze n delle discese, onde si abbia $P = (a - x)^n$, e $P' = -n(a-x)^{n-1}$ nascerà $y^2 = \frac{2\lambda n F(a-x)^{n-1}}{\pi} \sqrt{gx}$, e $y^4 = \frac{4\lambda^2 n^2 F^2 gx (a-x)^{2n-2}}{\pi^2}$.

1.° Quindi supposto $n = 2$, cioè i tempi come i quadrati delle discese, sicchè l'acqua discenda in tempi uguali per altezze proporzionali alla progressione de' numeri dispari 1, 3, 5, 7, 9, ec. come succede nella caduta libera de' gravi, risulta $y^4 = \frac{16\lambda^2 F^2 gx (a-x)^2}{\pi^2}$.

2.° Supponendo n una frazione qualunque propria per es. $\frac{\mu}{\mu + \eta}$, nasce $y^4 = \frac{4\lambda^2 \mu^2 F^2 gx}{(\mu+\eta)^2 \pi^2 (a-x)^{\frac{2\eta}{\mu+\eta}}}$; dalla qual equazione si scorge, che la curva ricercata taglia l'asse, ed ha un asintoto normale all' asse in distanza di a dall' origine delle ascisse.

Fine de' Supplementi.

SAG-

Tav. I. de Supplementi
Fig. 1.

SAGGIO

DEL SIG.

TEODORO BONATI

Matematico di Ferrara

Sopra una nuova Teoria del movimento delle acque per Fiumi.

SAGGIO

Di una nuova Teoria del movimento delle acque pei Fiumi

DEL SIG. TEODORO BONATI

Matematico di Ferrara.

1. Il P. CASTELLI Caſſinenſe fu quegli, che nel 1640. gettò il primo fondamento della Scienza de' fiumi con quel ſuo teorema, che qualora un fiume non creſce, nè cala, e che in conſeguenza ſi trova in uno *ſtato di permanenza*, per ogni ſua ſezione paſſa una egual copia di acqua in un tempo ſteſſo, qualunque ſiaſi l' ineguaglianza di quelle ſezioni. Stabilì indi, che le velocità dell' acqua nei fiumi foſſero in ragione delle altezze dell' acqua ſopra il fondo, ma col ſolo fondamento di alcune ſue ſperienze fatte in piccolo con canali artefatti; e ſi vede che inteſe di velocità medie, ſenza cercare ſe la velocità ſia la medeſima dalla ſuperficie al fondo, oppure ſe creſca, o ſcemi, e con qual legge.

2. Domenico GULIELMINI fece delle ſperienze ora con un vaſo parallelepipedo mantenuto ſempre pieno di acqua mentre queſta uſciva per un foro fatto in una ſponda del va-

so, ed ora con canali artefatti. Le prime davano, che le velocità pel foro fossero in ragione sudduplicata delle altezze dell' acqua sopra il foro. Nelle seconde poi le velocità recedettero non poco sì dalla ragione semplice delle altezze, che dalla ragione sudduplicata delle altezze suddette, come si vede nella Prefazione al trattato *De mensura aquarum fluentium* stampato in Ginevra l' anno 1719. Trattandosi di determinare le velocità dell' acqua pei fiumi, parea veramente che le seconde, perchè fatte con canali, che sono più analoghi ai fiumi che un vaso parallelepipedo, fossero da preferirsi alle prime: eppure queste non le descrisse nemmeno, e trascurandole affatto si attenne alle prime; ed ecco in compendio il suo sistema.

Fig. 1. 3. La vasca *QZA* (Fig. 1) somministri incessantemente acqua al fiume del fondo inclinato *ODE*. Si prolunghi la linea di questo fino all' incontro della superficie dell' acqua della vasca, cioè fino al punto *A* da denominarsi *origine del fiume*, e tirata l' orizzontale *AB*, e la *BD* normale al fondo, sia *DC* l' altezza dell' acqua della sezione in *D*. L' Autore nel lib. 2. prop. 2., e seguenti stabilisce, che le velocità dell' acqua per quella sezione (prescindendo dalle resistenze) debbano essere le medesime, che avrebbe l' acqua uscendo liberamente per un' apertura eguale alla detta sezione, e fatta nella sponda *BD*, di un vaso

BDA

BDA mantenuto pieno di acqua fino in *B*, le quali velocità nei punti *D*, *G*, *C*, ec. farebbero eguali alle velocità di un grave caduto dalle altezze dell' acqua insistente, o sia come le radici quadrate delle altezze *DI*, *GL*, *CM*, e però esprimibili colle semiordinate corrispondenti *DE*, *GH*, *CF* di una parabola conica *BFE*; e ciò perchè egli si persuadeva, che ogni particella di acqua giunta a qualunque punto *G* della sezione *DC* debba avere la velocità di un corpo solido disceso liberamente sopra un piano liscio, ed inclinato dall' origine *A* del fiume fino in *G*, la quale velocità si trova appunto eguale a quella del medesimo corpo allorchè fosse piombato dall' altezza *LG*. Sopra questo fondamento travagliò tutto quel trattato pieno di proposizioni assai belle, e che reggendo il fondamento sarebbero estremamente utili.

4. Se l' acqua in *CD* colle velocità *CF*, *GH*, ec. perdesse la sua gravità, allora sì che potrei concepire come l' acqua inferiore alla sezione *CD*, o sia l' acqua *CDK*, non fosse per fare veruna remora all' altra, che passar deve successivamente per *CD*, perchè supponendo inoltre l' acqua fluidissima, ed il fondo, e le sponde affatto liscie, vedrei come ogni particella *G*, ed ogni altra componente un filamento *GV* in virtù della propria inerzia potrebbe ritenere la velocità *GH*, ch' ebbe in *G*, e la

ſteſſa direzione *GV*, con che non potrebbe opporſi in veruna maniera alle altre particelle, che ſuccedono in *G* colla medeſima velocità, e direzione. Ma ſubito ch' io conſidero che l' acqua *CDK* è grave, toſto io vedo che gli ſtrati ſuperiori premono gl' inferiori, e che premendoli tendono a ſchiacciarli, ed inducono in eſſi un conato di ſpanderſi a tutte le bande, ed in conſeguenza anche all'indietro verſo l' origine del fiume, tutto che ſi trovi in moto verſo la foce; il qual conato all' indietro dell' acqua *CDK* dee fare una remora al movimento dell' acqua, che ſuccede in *CD*, onde queſta non potrà altrimenti muoverſi per *CD* con quella ſteſſa libertà, colla quale uſcirebbe dall' apertura libera fatta nella ſponda del vaſo *BDA*, come richiederebbe il ſiſtema dell' Autore.

5. Egli è poi certo, che queſta teoria non ha avuto luogo nemmeno proſſimamente nè nelle accennate ſperienze del CASTELLI, le quali furono ripetute da Gio. Domenico CASSINI in Roma, e con lo ſteſſo evento; nè lo ha avuto in quelle del GUGLIELMINI ſteſſo, tutto che sì quelle, che queſte ſieno ſtate fatte con canali artefatti, cioè retti, e col fondo, e colle ſponde liſcie, e nei quali perciò le reſiſtenze, che poſſono naſcere dalle ſcabrezze, ed ineguaglianze dell' alveo, devono eſſer montate a poco.

6. Meno poi ſi verifica la ſteſſa teoria

nei

nei fiumi naturali, perchè questi attese le resistenze, che derivano dalle tortuosità, ed ineguaglianze degli alvei, sono ben lontani dall' avere la velocità richiesta dalla teoria del GUGLIELMINI, cioè quella che compete alle discese delle loro acque, le quali perchè provenienti da origini ben alte dovrebbero avere delle velocità sorprendenti e tali, che nessun fiume sarebbe navigabile.

7. Nè sussiste punto l' applicazione, che fa di questa teoria il P. GRANDI al caso delle resistenze. Sia *DF* (Fig. 2) la velocità attuale alla superficie *DK* di un fiume *DL* da trovarsi colla sperienza, e *DE* sia l' altezza competente alla velocità *DF*, ed *EFH* una parabola conica col vertice in *E*, ed *ACI* sia un' altra parabola dello stesso parametro, che la prima, e col vertice in un punto *A*, che sia a livello della vera origine del fiume nel senso del GULIELMINI (3). Secondo il GRANDI le velocità dalla superficie *D* fino al fondo *G* del fiume senza le resistenze sarebbero le semiordinate *DC*, *BM*, *GI*, come disse il GULIELMINI; ma attese le resistenze incontrate dall' acque nel loro cammino dall' origine vera fino alla sezione *DG*, saranno *DF*, *BN*, *GH*, come se l' acqua fosse partita da una origine della sola altezza *DE*, che dall' Autore si chiama altezza dell' *origine equivalente*.

Fig. 2.

8. Ma si osservi, che le resistenze maggiori,

giori, ed in conseguenza i maggiori scemamenti di velocità devono trovarsi presso il fondo, laddove giusta il GRANDI lo scemamento maggiore di velocità caderebbe alla superficie, giacchè $CF > MN > IH$, come facilmente si comprende. E qui giova il notare, che lo stesso P. GRANDI non fu già intieramente pago di questo suo sistema: *essendomi passate* (egli dice nella Prefazione) *per la mente altre idee di nuove ipotesi, le quali mi si rappresentavano in aria di maggiore verosimiglianza*.

9. Dopo tutto ciò siami lecito, ch' io esponga brevemente ciò, che ho pensato più volte intorno al moto delle acque pei fiumi. *CD* sia il fondo inclinato di un tratto regolare di un canale (Fig. 3), ed *AB* sia la superficie dell' acqua, la quale sia più inclinata, che il fondo, cioè con esso convergente. S' intenda divisa l' altezza *AC* in tante parti eguali, per esempio *AP*, *PT*, *TC*, ed in altrettante parti eguali *BR*, *RV*, *VD* s' intenda divisa l' altezza *BD*. Supporrò, che le particelle *A*, *P*, *T* camminino per le linee *AB*, *PR*, *TV*, giacchè non vedo ragione, onde in un canale regolare debba accadere diversamente. Si consideri la particella *E* di un filamento *PR* dell' acqua. Se la verticale *ES* esprimerà il peso assoluto di essa, fatto il rettangolo *ZG*, sarà *EG* la forza, colla quale quella particella viene spinta dalla gravità nella direzione del suo

Fig. 3.

me-

movimento verso R. Lo stesso si dica di ogni altra eguale particella P, o G del filamento PR, ognuna delle quali vien sollecitata continuamente dalla gravità verso R con una forza eguale alla EG, ch' è in ragione del seno dell' angolo $ESG = SEZ = PEt$ d' inclinazione del filamento PR all' orizzonte.

10. Così ogni altra particella I di un filamento inferiore TV viene spinta lungo la linea TV da una forza IK derivata dal proprio peso assoluto IQ. Per essere però la linea TV meno inclinata all' orizzonte, che la PR, l'angolo $IQK < ESG$; onde se le due particelle saranno eguali, ed $IQ = ES$, sarà $IK < EG$. Dunque per questa sola ragione nel qui supposto caso della superficie convergente col fondo la velocità dalla superficie andando verso il fondo dovrebb' essere sempre minore. Che se la superficie fosse parallela al fondo, anche tutti i filamenti PR, TV sarebbero paralleli fra di loro, e le forze EG, IK sarebbero eguali, e per questa sola ragione la velocità dalla superficie fino al fondo in questo secondo caso sarebbe eguale. E se la superficie AB divergesse dal fondo, anche i filamenti PR, TV sarebbero divergenti, e la EG sarebbe minore della IK, e per questa sola ragione in questo terzo caso le velocità dalla superficie fino al fondo sarebbero crescenti.

11. Codeste forze EG, IK, che così agitano

tano le particelle *E*, *I*, derivate dal loro proprio peſo, ſi poſſono dire forze intrinſeche alle medeſime particelle. Ma queſte ſteſſe particelle vengono inoltre agitate da altre forze ad eſſe eſtrinſeche, cioè dalle preſſioni delle altre particelle di acqua ad eſſe contigue, che le attorniano, e che le premono per tutti i verſi. E ſiccome per eſempio la particella *I* così premuta ſi muove nella direzione *IV*, è forza il dire che in qualunque altra direzione vi ſia l'equilibrio fra le preſſioni contrarie, che tendono a muovere la ſteſſa particella *I*. Altrimenti ſe mancaſſe un tale equilibrio, per eſempio nella direzione *IQ*, la particella *I* ſi muoverebbe in una direzione di mezzo fra la *IQ*, e la *IV*, e non nella ſuppoſta *IV*.

12. Baſterà pertanto che ſi eſaminino le preſſioni di quelle particelle contigue, che poſſono aver parte nel maggiore, o minor movimento della particella *I* nella ſola direzione *IV*. Si conſideri perciò l'acqua *ATVB* come diviſa in tante colonne verticali inſiſtenti a ognuna delle particelle minime acquee componenti il filamento *TV*, delle quali alcune ſieno *L*, *I*, *F*, le cui colonne inſiſtenti ſieno *LH*, *IO*, *FN*. Qualunque ſieno le velocità dell'acqua da *O* fino in *I*, ſarà ſempre vero che le dette colonne premeranno continuamente al baſſo con tutto il loro peſo, onde la particella *I* in virtù della gravitazione dell'acqua *OI* farà un conato

nato a tutte le bande (come comunemente vien dimostrato), ed in conseguenza anche verso *L*, proporzionale all' altezza *IO*. Ma a questo conato verso *L* si oppone l' acqua *HLI*, la quale respinge la stessa particella *I* verso *F* con un conato proporzionale all' altezza del punto *H* sopra il punto *I*, onde questo prevalerà al conato contrario della *I* verso *L* col peso della colonna acquea *Hz* determinata dalla orizzontale *Oz*, e sarà questa un' altra forza della *I* ad essa estrinseca derivata dall' acqua, che le sovrasta, e l' attornia, la qual forza, o peso della colonna *Hz* la agita verso *V* unitamente alla forza *IK* derivata dalla gravità. Lo stesso vale per ogni altra particella del filamento *TV*, come per la *F*, che viene agitata verso *V* da una forza intrinseca derivata dalla gravità, ed inoltre da una forza estrinseca eguale al peso della colonna acquea *Oy* determinata dalla orizzontale *Ny*.

13. Si vede, che codeste forze estrinseche proporzionali alle *Hz*, *Oy*, ec. sono in ragione del seno d' inclinazione della superficie *AB* all' orizzonte, qualunque siasi la profondità della particella *I* sotto la superficie, e qualunque siasi la direzione *IV* del moto della *I* verso *V*, e perciò anche quando una tal direzione invece di essere declive, come mostra la figura, fosse orizzontale, od anche acclive, come accade presso i fondi inferiori, ed acclivi dei gorghi,

che

che s' incontrano nei fiumi, e presso il fondo di quei fiumi, che verso i loro sbocchi in mare hanno il fondo acclive, come il Po grande, od anche presso il fondo acclive dei fiumi al loro accostarsi al ciglio di una qualche cateratta.

14. Quindi è, che per la sola forza estrinseca ora ritrovata di ogni particella *I* le velocità di queste dovrebbero essere esattamente eguali tanto alla superficie, che sotto la superficie, e sino al fondo.

15. Queste due forze, una intrinseca, che deriva dal proprio peso di ogni particella, e l'altra estrinseca, che deriva dalla pressione dell' acqua insistente all'acqua, e nessun' altra, sono le forze, che tendono ad accelerare l' acqua lungo il fiume continuamente, cosicchè se la loro azione non venisse disturbata noi vedremmo i fiumi sempre più veloci quanto più ci accostiamo allo sbocco. Ma questo realmente non accade, giacchè allontanandoci dalla origine, ed arrivati per esempio alla pianura, dove il fondo è tuttora declive, benchè meno, osserviamo la velocità scemata di molto, e talvolta la vediamo scemata anche vie più prima di arrivare allo sbocco.

16. Quest' effetto deriva dalle resistenze, che fanno all' acqua prima le tortuosità del fiume, e poi le scabrezze del fondo, e delle sponde, le quali scabrezze non si può negare che ritardino l' acqua sensibilmente anche in distanza

ſtanza dal fondo, e dalle ſponde, benchè il ritardo ſia ſempre minore a miſura che ci ſcoſtiamo da quello venendo alla ſuperficie, e da queſte accoſtandoci al filone. E ſiccome le reſiſtenze, che derivano dalle ſcabrezze, giuſta le ſperienze fatte, creſcono in ragione duplicata delle velocità, facilmente accade che continuando le medeſime ſcabrezze, e creſcendo la velocità per la continua azione delle accennate forze motrici, creſcono altresì le reſiſtenze, ed in maniera che preſto arrivano a pareggiare le forze motrici, con che l'acqua preſto giugne ad una velocità *terminale* conveniente alle condizioni particolari di un dato tratto di fiume. Che ſe andando più oltre nello ſteſſo fiume le ſcabrezze creſcano, la velocità diminuirà, e con eſſa caleranno anche le reſiſtenze, finchè queſte ſi equilibrino di nuovo con le forze motrici, e ſi abbia così un'altra velocità terminale conveniente alle circoſtanze di quell' altro tratto di fiume. Se ſcemaſſe, o creſceſſe la pendenza del fondo, e della ſuperficie, le forze motrici diverranno diverſe, e varia a proporzione riuſcirà la velocità terminale.

17. L'unico caſo da me contemplato, in cui la velocità ſotto la ſuperficie potrebbe eſſer maggiore, che alla ſuperficie, è quando la ſuperficie ſia divergente dal fondo (10). Ma queſto nei tratti regolari di un fiume non s' incontra, mentre anzi generalmente la ſuperficie

piut-

piuttosto converge col fondo, benchè di tanto poco, particolarmente a qualche distanza notabile dallo sbocco, che in certo modo si può considerarla come parallela al fondo. Ed in questo caso le forze rispettive *EG*, *IK* riescono eguali, e per le cose dette ai n. 10, 14, se non vi fossero le resistenze, la velocità dalla superficie al fondo sarebbe esattamente la medesima. E perchè nel filone la maggiore resistenza deriva dal fondo, giacchè l'acqua colà è più vicina al fondo, che alle sponde, la velocità nel filone sarà minore presso il fondo, e poi crescerà venendo verso la superficie prima più, e poi meno fino alla superficie, cosicchè la velocità massima sarà alla superficie, e la scala delle velocità sarà una qualche curva, come la *ABC* (Fig. 4) dell'asse *DE*, essendo *DA* alla superficie, ed *EC* al fondo.

Fig. 4.

18. Colla teoria finqui esposta si comprende come un fiume, il quale abbia la superficie più inclinata che un altro, in parità di circostanze dovrà essere più veloce dell'altro perchè abbiamo veduto, che una delle forze motrici è in ragione del seno d' inclinazione della superficie (13). Nel mio sperimento XVIII. contro GENNETÉ a un canale artefatto del fondo *AH* (Fig. 5) con acqua corrente da *A* verso *H* applicai una chiusa *MF*, e l'acqua dispose la superficie come la *IFN*, e la velocità in *B* era maggiore che in *C*, ed in *D*. In *E* poi il moto

Fig. 5.

moto era notabilmente accresciuto, e più di tutto in *F*. In *G* il moto bene spesso era vorticoso. Dimandai l'anno 1767 qual fosse la forza, che muove l'acqua in *D*, e che fa crescere la velocità in *E*. Ora dirò, che la forza movente l'acqua in *D*, ed in *E* è l'accennata al n. 12, e trovata al n. 13 in ragione del seno d'inclinazione della superficie dell'acqua sopra *D*, e sopra *E*, e che la velocità in *E* è maggiore appunto perchè ivi l'inclinazione della superficie si fa maggiore.

19. Crescendo in un fiume l'altezza dell'acqua, ancorchè non crescesse l'inclinazione della superficie, crescerebbe la velocità, perchè l'acqua componente quell'altezza di più come più lontana dal fondo sentirà meno le resistenze di questo, e potrà ubbidire più alle sue forze motrici, che l'altra, che componeva la sola altezza di prima, e si muoverà più, e metterà anche più in moto l'acqua sottoposta. Maggiormente poi crescerà la velocità se, crescendo l'altezza, cresca ancora l'inclinazione della superficie.

20. Crescendo la larghezza senza che scemi l'altezza e l'inclinazione di superficie, le parti di mezzo del fiume saranno più lontane dalle sponde, le cui scabrezze saranno perciò un minor ritardo al filone, onde questo si muoverà più, e metterà più in moto il rimanente.

21. Egli è questo il saggio di teoria del mo-

movimento delle acque pei fiumi, ch' io mi era prefisso di esporre. Ora verrò esaminando quanto questa teoria si concilj colla sperienza. Il metodo più insinuato dagli Autori, ed il più applaudito per iscoprire colla sperienza il moto dell' acqua anche sotto la superficie, è stato quello di un pendolo, o sia di una palla *B* (Fig. 6) attaccata con un filo a un punto fisso *A* da immergersi sotto la superficie *DE* dell' acqua di un fiume corrente da *D* verso *E*, la quale perciò terrà la palla col filo lungi dalla verticale *AD* più, e meno secondo la diversa velocità dell' acqua, ed il diverso peso specifico della palla, pretendendosi di poter ricavare così la velocità dell' acqua nel sito della palla colla sola osservazione dell' angolo di deviazione della parte del filo fuori dell' acqua.

Fig. 6.

22. Di questa fatta di sperimenti proposti dal GUGLIELMINI, dal P. GRANDI, dall' ERMANO, ed ultimamente dal chiarissimo P. Ab. CAMETTI nella sua *Mechanica fluidorum* l' anno 1777 ne vedo fatti non pochi dal ZENDRINI, dai Matematici di una Visita al Po grande l' anno 1729, dal P. LECCHI, e dal Sig. MICHELOTTI; i quali generalmente hanno trovato, che alle immersioni più profonde della palla ha corrisposto un maggior angolo di deviazione del filo dalla verticale, e generalmente hanno convenuto, che le velocità dell' acqua nel sito della palla fossero in ragion duplicata

delle

delle tangenti dei detti angoli, d'onde ne verrebbe, che a maggiori profondità sotto la superficie corrispondano velocità sempre maggiori, affatto contro la mia teoria (17).

23. Due inavvertenze a mio giudicio si sono commesse in questo genere di sperimenti dai loro Autori. L'una è, che quando la palla è immersa a qualche profondità, l'angolo di deviazione del pendolo non deriva solamente dall'azione dell'acqua contro la palla, come essi hanno creduto, ma deriva ancora dall'azione dell'acqua contro quella porzione di filo, che si trova immersa, ed esposta all'acqua. Per la qual cosa quand'anche la velocità dell'acqua sotto la superficie, e fino al sito della palla, si mantenesse la medesima che in superficie, l'angolo di deviazione del filo, che si osserva fuori dell'acqua, dovrebbe necessariamente esser maggiore, che quando la palla fosse appena sotto la superficie; e profondando la palla di più, il detto angolo crescerebbe di più, perchè l'acqua agirebbe contro una porzione maggiore di filo.

24. L'altra circostanza non avvertita è, che il filo essendo pieghevole dee disporsi sott'acqua in una curva EOF, che vien detta *filare*, e per determinare la quale converrebbe che fosse nota la scala delle velocità dell'acqua, ch'è appunto quella che si cerca.

25. Da quest'ultima considerazione si fanno

no palesi altri due inganni de' soprannominati Autori: L'uno è, che hanno giudicato la palla nel punto G della retta AE prolungata, ed in conseguenza alla profondità IG, che è minore della vera profondità HF. L'altro poi più interessante è, che hanno dedotto la velocità dell'acqua nel sito da essi supposto della palla dalla grandezza dell'angolo DAE di deviazione del filo non sommerso, quando veramente non potrebbe desumersi che dall'angolo cam, che fa colla verticale am il diametro ac della palla, che parte dal punto a di sospensione della palla dal filo; il qual angolo ognun vede ch'è sempre minore dell'angolo DAE (per essere $cam = iFn$, e $DAE = EnH > iFn$); e sarà eguale all'angolo DAB nel caso, che la velocità in F sia eguale alla velocità in B; e sarà anzi minore dell'angolo DAB nel caso, che la velocità in F fosse minore che in B.

26. Per tutte queste ragioni i suddetti Autori hanno errato, e l'errore dev' essere stato maggiore secondo che la palla è stata di un peso specifico minore, e secondo che il filo è stato più grosso, e più sott' acqua. La grossezza del filo ci vien taciuta da tutti; ma egli è certo, che quei fili hanno retto al peso della palla, ed all' impressione dell'acqua contro la palla, dal che si può concludere, che la loro grossezza non sia stata indifferente, e trascurabile, come me lo ha poi mostrato lo sperimento, che vengo a descrivere. 27.

27. In un canale largo piedi 15 circa (parlerò a misura di Parigi), e profondo sei piedi, con un galleggiante trovai, l'anno 1769, che la velocità dell' acqua in superficie era di piedi 2. 4 per ogni minuto secondo. Nel fondo *GT* (Fig. 7) del medesimo canale presso un ponte di legno, che non angustiava punto il corso dell' acqua, conficcai verticalmente una tavola *PB* di tale lunghezza, che superava la superficie *CD* dell' acqua, avendo fatto che la faccia *AB* fosse parallela alle sponde, o sia a seconda del corso dell' acqua diretto da *C* verso *D*. Ben fermata la tavola con una mano in *O*, io immergeva a poco a poco l' asta *OE* facendo strisciare un risalto *F* dell' asta lungo la costa *Pn* della tavola, intorno al quale risalto *F* l' asta potea aggirarsi accostandosi alla tavola ora con l' estremità *E*, allorchè l' acqua investiva con maggior forza la parte *FE* che l' altra *FC*, ed ora con l' estremo *O*, se l' acqua spingeva con più di forza la parte *FC* che l' altra *FE*.

Fig. 7.

28. Lo scopo mio era di trovare quella immersione, in cui la forza dell' acqua contro *FE* si equilibrava con l' altra contro *FC*. Arrivato al punto di tale equilibrio io me ne accorgeva facilmente, perchè allora colla mano io sentiva, che l' estremo *O* nè mi veniva spinto dall' acqua verso la tavola, nè mi veniva allontanato dalla medesima.

29. In uno di questi sperimenti la parte *FE* era di un piede, e tentando trovai il detto equilibrio quando *FC* fu di 11 pollici; il che mostra, che quell' acqua fino alla profondità di quasi due piedi sotto la superficie correva con una velocità minore, che in superficie, però di poco. Nel secondo sperimento io avea mutato luogo al risalto *F* dell' asta in maniera, che *FE* era di due piedi, e tentando di nuovo trovai il descritto equilibrio quando *FC* fu di un piede e mezzo: il che mostra, che alla profondità di tre piedi e mezzo, o sia di piedi 2. 6 sopra il fondo, la velocità era sensibilmente minore che in superficie.

30. Nel medesimo sito feci uso di un pendolo. La palla era del diametro di due pollici, ed immersa nell' acqua perdeva la metà del suo peso. Il diametro del filo era due terzi di linea, e lo stesso filo era attaccato a un punto fisso *A* (Fig. 8) sopra l' acqua *BD*, piedi 2. 11. Nella prima immersione il filo *AC* era di piedi 3. 6, e l' angolo *BAC* fu tale, che l' orizzontale *BF* riuscì di pollici 18 prossimamente, cosicchè la palla rimaneva sotto la superficie dell' acqua corrente alquanto meno di due pollici e mezzo.

Fig. 8.

31. Avendo dato al filo una lunghezza maggiore *AE* di piedi 6. 11, ebbi l' angolo *BAD*, essendo *BD* di pollici 32, e *DE* di piedi 2. 8. 4.

32.

32. Le linee rette eguali CG, EL verticali esprimano il peso della palla nell' acqua, il qual peso in C equivalerà a due forze CK, CH, ed in E a due altre forze EN, EM. Ma le due forze CH, EM devono equilibrarsi colle forze contrarie dell' acqua, le quali sono come i quadrati delle velocità in C, ed in E. Dunque secondo i soprannominati Autori i quadrati delle velocità in C, ed in E avrebbero dovuto essere : : $CH : EM :: GK : LN :: BF : BD$, ed in conseguenza la velocità in C alla velocità in $E :: \sqrt{BF} : \sqrt{BD} :: \sqrt{18} : \sqrt{32}$ (vegg. n. 30. 35.) : : $\sqrt{(9.2)} : \sqrt{(16.2)} :: 3 : 4$, cioè secondo essi la velocità in E dovrebb' essere stata sensibilmente maggiore, che in C; dovechè secondo le sperienze precedenti la velocità in E era sicuramente minore, che in C (29, 30).

33. Dopo tutto ciò parmi di poter concludere, che l' uso di tai pendoli non è punto al caso per iscoprire le vere velocità dell'acqua a qualche profondità notabile sotto la superficie, e che dalle sperienze fatte con essi non si può tirare veruna conseguenza nè favorevole, nè contraria a una qualche teoria.

34. Lo stesso affatto convien dire di altri sperimenti fatti in Po con una certa *Fiasca* riferiti dal P. GRANDI alla fine del suo primo libro, e da Eustachio MANFREDI nelle Annotazioni al trattato della natura de' fiumi del

GUGLIELMINI. La detta Fiasca, che dal P. GRANDI si dice *Idrometrica*, era stata proposta dal NADI del 1721 in occasione di una Visita al Po. Era questa un vaso *A* (Fig. 9) di latta più lungo che largo, con un sottil foro in *E* aperto verso la sommità della parte più stretta, e con un tubo annesso *BG*, per cui passava un filo attaccato a una susta, cosicchè tirando il filo in *G* il foro *E* restava aperto, e rallentando il filo quel foro restava chiuso. Immersa la Fiasca a varie profondità sotto la superficie *MN*, e tenuto il foro *E* aperto per un dato tempo, e rivolto contro la corrente, l'acqua entrava per *E* mentre l'aria contenuta nella Fiasca poteva uscire pel tubo *BG*. Le quantità di acqua, che in tempi eguali entrarono per *E* nella Fiasca tenuta a diverse profondità, furono sempre in ragione suddupplicata delle altezze dell'acqua del fiume sopra il foro *E*; dal che si volea arguire, che tale fosse la ragione delle velocità dell'acqua del Po a quelle diverse profondità. Ma siccome lo stesso avvenne quando le sperienze furono ripetute in un'acqua stagnante, si dovette concludere che il metodo era inutile.

Fig. 9.

35. Altre sperienze sono state fatte col *Tubo ricurvo del* PITOT. Adoperò quest'Autore un tubo di vetro *AEF* ricurvo in *E* (Fig. 10) assicurato nell'acqua corrente con certa macchinetta da esso descritta nelle Memorie dell'

Fig. 10.

Ac-

Accademia Reale delle Scienze di Parigi all' anno 1732. Immerſe il tubo a diverſe profondità *CE* ſotto la ſuperficie *CD* della Senna, e tenendo la bocca *F* diretta contro il corſo dell' acqua, notò le altezze *CB*, cui ſaliva l' acqua dentro il tubo ſopra il livello dell' acqua eſteriore *CD*. La velocità, che può acquiſtare un grave cadendo liberamente dall'altezza *BC* trovata in ciaſcuna immerſione, era ſecondo l' Autore la velocità dell' acqua in *F*. Il ZENDRINI (*Leggi* ec. *delle acque correnti* pag 134) ſoſpetta, che l' altezza *BC* non ſia proporzionale alla forza dell' acqua in *F*, e che parte di queſta forza s' impieghi in penetrare attraverſo il cilindretto acqueo *EC* ſtagnante nel tubo; ed il Sig. Franceſco Domenico MICHELOTTI (*Sperimenti Idraulici* vol. I. pag. 148) credette, che la forza della corrente in *F* doveſſe miſurarſi non dalla ſola altezza *CB*, ma da tutta l' altezza *EB*, coſicchè le velocità in *F* ſarebbero come le radici quadrate delle altezze *EB* per eſſere le forze come i quadrati delle velocità. Io per accertarmi del vero col fatto mi ſon ſervito di un tubo *AEF* di latta, dentro il quale avea inſerito una bacchetta ſottile, e leggiera *GB*, lunga come *AE*, che galleggiava ſopra l' acqua mediante un pezzo di ſughero applicato all' eſtremo *B* di modo, che la porzione *AG* eſterna della bacchetta mi dinotava l' altezza del cilindro acqueo *EB* dentro il tu-

 bo;

bo; ed in varie immerſioni più, e meno pro-
fonde la porzione *CB* fu proſſimamente la me-
deſima tuttochè variaſſero le altezze *BE*. E
ſiccome queſto mi accadde in quel medeſimo
luogo, dove io mi era accertato colle ſperien-
ze del n. 29, che l' acqua correva preſſochè
colla medeſima velocità in ſuperficie, e ſotto la
ſuperficie fino alla profondità del mio tubo, mi
ſono con ciò aſſicurato che non abbia luogo la
difficoltà del ZENDRINI, e del Sig. MICHELOTTI.

36. Di più il Sig. MICHELOTTI dopo un
qualche carteggio con me replicò le ſue ſpe-
rienze, e nel ſuo ſecondo Volume ſtampato in
Torino l' anno 1771 dice di aver immerſo un
tubo ricurvo di latta ſimile al mio colla bocca
inferiore rivolta ſecondo la direzione del corſo
dell' acqua, e di aver oſſervato, che allora nel
tubo l' acqua ſi componeva al livello della
eſteriore, e che rivolta la ſteſſa bocca contro
la corrente l' acqua interna ſi elevò nel tubo
ſopra l' eſterna; e ſpiega il fenomeno con dire,
che nel primo caſo la ſola preſſione dell' acqua
eſteriore facea ſalire l'acqua nel tubo, e che
nel ſecondo caſo alla ſemplice preſſione ſi ag-
giunſe una forza prodotta dal movimento dell'
acqua corrente; e perciò conviene, che in tai
caſi la celerità dell' acqua ſi poſſa argomentare
dal maggior alzamento dell' acqua dentro il tu-
bo ſopra l' acqua al di fuori del tubo alla ma-
niera del PITOT.

37.

37. Ma in diverse immerſioni fatte dal PITOT del suo tubo sotto il ponte reale della Senna; delle quali la maſſima fu a tre piedi sotto la superficie, l'acqua dentro il tubo ſi alzò sempre egualmente sopra l'acqua eſterna. Dunque colà per le coſe dette fino a tre piedì sotto la superficie la velocità fu senſibilmente la medeſima.

38. Il chiariſſimo Sig. Ab. XIMENES negli anni 1778, 1779 adoperò la seguente macchina. *AB* (*Fig.* 11.) è un albero verticale, che potea muoverſi liberamente intorno ai perni *A*, e *B*. Alla rotella *C* era avvolto un filo, che paſſava sopra una puleggia *D*, e che portava un peso *E*. A qualunque profondità *MN* sotto la superficie *GH* dell' acqua potea fermare all' albero *AB* una ventola *F* con due braccioli *a*, *c*; ed il peso *E* dovea eſſere tale, che teneſſe la ventola preſſochè ferma normalmente contro il corso dell' acqua. Dalle misure della ventola, dei suoi braccioli, della rotella, e del peso *E* di ciascuna sperienza deduce l'altezza di quel prisma di acqua, che premeva la ventola, la quale altezza è quella, che conviene a un corpo cadente per acquiſtare la velocità dell' acqua nel ſito della ventola. Da una serie di sperienze deduſſe, che dalla superficie fino a un certo punto verso il fondo l'acqua ſi manteneva egualmente veloce; e che da quel punto fino al fondo la velocità diveniva senſibilmente sempre minore.

Fig. 11.

39.

39. Finalmente dirò di uno sperimento, che per quanto io sappia è stato il primo ad essere tentato per investigare in qualche maniera nei fiumi il rapporto della velocità dell'acqua sotto la superficie a quella della superficie: ed è quello del P. CABEO Ferrarese con un'asta *AB* (*Fig.* 12.) di legno con un corpo in *B* di un peso specificamente maggiore di quello dell'acqua, e con alcune vessiche in *C*, buttata nell'acqua di un fiume colla superficie *MN*, e corrente da *M* verso *N*. Ecco che ne dice l'Autore nel suo libro primo delle Meteore stampato in Roma l'anno 1686 al testo 60: *Si enim poneres hastàm in aqua stagnanti, pars eminens* AC *esset perpendicularis ad superficiem aquae; similiter si moveatur tota aequali velocitate, servaret semper eamdem positionem. At videbis partem eminentem hastae supra superficiem aquae inclinari ad partem anteriorem, quod est evidens argumentum superiorem partem aquae velocius fluere.*

Fig. 12.

40. Fin qui ho parlato degli sperimenti fatti da altri, non avendone inserito dei miei, che per incidenza, e parmi di aver mostrato, come di essi alcuni non sono punto atti a dinotar bene le velocità sotto la superficie, come sono tutti gli sperimenti fatti con Pendoli, e gli sperimenti fatti colla Fiasca Idrometrica del NADI; e che tutti gli altri mostrano chiaramente, che nei siti degli sperimenti le velocità sotto la superficie o sono state eguali alla velo-

città

cità della superficie, o ne sono ſtate minori; come richiede generalmente la mia teoria. Ora in conferma di queſto soggiungerò alcuni altri sperimenti miei.

41. Di due sperimenti fatti da me in Roma l'anno 1763 non farò parola, perchè fatti in piccolo, e perchè ſi poſſono vedere in due Raccolte una ſtampata in Parma, e l'altra in Firenze, e sono i due primi dell'*Aggiunta di Sperimenti* contro GENNETÈ; onde paſſerò ad altri, de' quali il primo ſia il da me replicato più volte trovandomi in qualche barca. Ho fatto, che queſta ſi muova a seconda del corso dell'acqua, e colla velocità dei galleggianti vicini. Esprima *AC* (*Fig.* 13.) la superficie di quell'acqua corrente da *A* verso *C*. *DE* era un'aſta di legno lunga sei, otto, dieci piedi (talvolta era un remo), ch'io immergeva nell'acqua verticalmente, coſicchè reſtava fuori dell'acqua con una porzione *BD*, e per tenerla in tal poſitura io non impiegava altra forza che quella di premere colla mano in *D* in giù quanto baſtava per impedire, che l'aſta, perchè di un minor peso specifico dell'acqua, non veniſſe spinta all'insù dall'acqua medeſima. E quando il corso della barca diveniva per esempio alquanto maggiore di quello dei galleggianti, l'aſta ſi piegava con forza girando l'eſtremo *E* verſo *A*; ſuccedendo il contrario qualora la barca diveniva, anche per poco, più

Fig. 13.

lenta

lenta dei galleggianti vicini. Dal che si vede manifestamente, che quando la barca andava del pari coi galleggianti, e che l' estremo *E* non mi veniva portato nè verso *A*, nè verso *C*, si vede, dissi, che l'acqua sotto la superficie non correva sensibilmente più, che in superficie, perchè se avesse corso più sotto la superficie, mi avrebbe portato l' estremo *E* verso *C*.

42. Altre volte essendo pure in barca ho immerso nell' acqua dei mattoni appesi ognuno ad uno spago, che venivano tenuti da me, e da altri colla mano sporta fuori della barca. Gli spaghi erano di diverse lunghezze, e quando mi trovava colla barca in siti regolari del fiume, e che la barca andava del pari coi galleggianti vicini, le porzioni di spago fuori dell' acqua erano sensibilmente verticali, a riserva dei più lunghi (i cui mattoni attaccati si accostavano al fondo del fiume), de' quali le porzioni fuori dell' acqua si vedevano sensibilmente inclinate all' avanti, dinotando così, che presso il fondo la velocità diveniva minore.

43. Nel sito descritto al n. 27, e dove mi era assicurato, che l' acqua alla profondità di due piedi e mezzo circa correva con una velocità minore, ma di poco, che in superficie, buttai una canna *DE* avente in *E* un mattone di tal peso, che dopo pochi bilanciamenti restò immersa con una porzione *BE*

lunga

lunga non più di tre piedi, essendo trasportata dall' acqua con una positura sensibilmente verticale, a riserva di alcuni pochi tratti, nei quali camminò inclinata all' avanti, ma di poco. Altre volte, e non poche, ho ripetuto questo sperimento nel Po grande servendomi colà non di canne, ma di aste di legno ora con mattoni, ed ora con piombo in *E* di tal peso, che l' asta rimaneva sopra l' acqua con una lunghezza di un piede, o due, essendo il Po ora con acqua mediocre, ed ora in piena, ed essendo la porzione *BE* talvolta di 10, talvolta di 15, ed una volta di 20 piedi; ed in questi casi vidi tali aste qualche volta sensibilmente verticali, ma per lo più inclinate all' avanti, benchè di poco, a riserva delle volte, ch' io mi sono incontrato dove l' acqua avea dei moti irregolari, nei quali qualche volta l' asta è stata inclinata all' indietro, ed una volta avendo due aste una più lunga dell' altra, una di queste era inclinata a una parte, e l' altra a un' altra nel medesimo tempo, indizio di un movimento vorticoso.

44. Ecco pertanto un' altra mano di sperimenti, dai quali ho appreso, che nei siti regolari dei fiumi le velocità dalla superficie al fondo o sono sensibilmente le medesime fino a un certo punto poco distante dal fondo, come dice di aver osservato il Sig. Ab. XIMENES, o (il che mi sembra più naturale) decrescono,

ma

ma da principio assai poco, facendosi poi gradatamente vie maggiore il decrescimento a misura che si va più verso il fondo, e con quella legge, che non è per anche nota. Per la qual cosa parmi di dire a ragione, che la teoria da me esposta concorda assai bene colla sperienza; desiderando io per altro, che altri ancora si occupino in esperimenti di questa natura; perchè instituite con metodo più serie di consimili sperienze in fiumi diversi, ed in istati diversi potrebb' essere, che si arrivasse un dì ad avere una legge delle velocità delle acque correnti pei fiumi sufficientemente prossima al vero, colla quale date le misure, e le condizioni di un fiume si possa senz' altro dire qual sia la sua portata, punto molto interessante pel regolamento dei fiumi. Ma finchè ci mancano codeste serie di sperimenti come trovare la portata di un fiume? Sarà questo il soggetto dell' Articolo, che segue.

Nuovo metodo per trovare colla sperienza la quantità dell' acqua corrente per un fiume.

45. Per misurare l' acqua corrente per un piccolo canale largo per esempio tre palmi, ed alto uno, se il canale era irregolare, il P. CASTELLI (prop. 1. l. 2.) applicava ad esso un Regolatore, o sia un letto orizzontale di legno, e due sponde verticali di legno; ed inferior-

riormente al Regolatore inteſtava il canale, e ad una ſua ripa preſſo il Regolatore applicava tanti ſifoni, che aſſorbiſſero tutta l' acqua ſopravveniente di modo, che il canale per l' applicazione di eſſi non cresceſſe, nè calaſſe. E trovata colla ſperienza quant'acqua ſcaricava in un dato tempo ciaſcun ſifone ſapeva dire la *portata* del canale; o ſia quant'acqua paſſava per una ſezione regolare di eſſo (qual era quella del Regolatore) anche non eſſendovi l' inteſtatura. Trattandoſi in ſecondo luogo di un canale più groſſo, per eſempio largo 20. palmi, ed alto 5, per averne la portata applicava a queſto pure un Regolatore o di legno, o di muro, e ſuperiormente a queſto derivava dal canale un canaletto largo tre, o quattro palmi applicandovi un Regolatore. Coi ſifoni miſurava la portata di queſto, e dal rapporto delle altezze, e larghezze dell' acqua corrente pei due Regolatori argomentava (colla ſua regola delle portate in ragione delle larghezze, e dei quadrati delle altezze) qual foſſe la portata del canale maggiore. Accadendo in terzo luogo di dover trovare la portata di un fiume groſſo, proponeva, che ſi applicaſſe a queſto un Regolatore, e che dal fiume ſi divertiſſe un canale miſurabile, come il precedente, e che colla regola accennata ſi trovaſſe anche la portata del fiume groſſo. Non gli facea caſo la ſpeſa grave che potrebbe occorrere per fare

tai

tai rilievi dicendo, che i concetti grandi, come quello di misurare l'acqua di un fiume grosso, non devono cascare in mente, che a persone grandi, a Principi potenti, e che possono fare una qualche spesa per isfuggire altre spese maggiori, che si farebbero per mancanza della cognizione della quantità ricercata dell'acqua, e per isfuggire anche dei disgusti fra i medesimi Principi.

46. Ma quantunque alla regola delle velocità come le altezze, o sia delle portate come le larghezze, ed i quadrati delle altezze, si conformino più sperienze in piccolo; pure perchè tal regola è tuttora senza dimostrazione, nè è ancora ben verificata da sperienze in grande, non vedo, che questo metodo del CASTELLI per trovare la misura dell'acqua corrente per un fiume sia da abbracciarsi.

47. Il GUGLIELMINI pure si vale di uno, o più Regolatori, ma in una maniera diversa. Propone, che al Regolatore si applichi una Cateratta, la quale si cali fino a un piede, o due, sotto la superficie dell'acqua corrente pel Regolatore, con che l'acqua sarà obbligata a gonfiarsi superiormente alla cateratta. E supponendo le velocità dell'acqua corrente per quella sezione così diminuita come le ordinate di una parabola conica col vertice alla superficie dell'acqua sostenuta, trova la quantità dell'acqua del fiume. Se il fiume è così grande, che

non

non vi si possa adattare un Regolatore, suggerisce, che col metodo prescritto si misuri l'acqua dei fiumi minori, che lo compongono, come meglio si può vedere alla fine del lib. 4. della *Misura delle acque correnti*, dove alla difficoltà della molta spesa risponde col sentimento sopra riferito del P. CASTELLI.

48. Ma ho mostrato, che la velocità delle acque correnti non sono già come qui vuole l'Autore (4, 5, 6,). Dunque nè anche questo metodo del GUGLIELMINI è al caso nostro.

49. Altri hanno scielto più perpendicolari di una sezione del fiume, e adottando per sicuro l'uso del pendolo hanno con questo indagato la velocità dell'acqua a diverse profondità di ciascuna perpendicolare, indi trovata una velocità media fra tutte le pretese trovate velocità hanno moltiplicato questa nella sezione stessa. Ma ho mostrato quanto sia fallace l'uso del pendolo (21, 22, 23, 24, 25), perciò fallaci saranno stati ancora i risultati di tai rilievi.

50. Potrebbe cader in pensiero a taluno di adoperare il tubo ricurvo del PITOT in luogo del pendolo. Ma convien sapere in primo luogo, che l'acqua interna al tubo è soggetta ad oscillazioni sensibili, particolarmente dove il corso dell'acqua è più veloce, onde conviene sciegliere un'altezza di mezzo con una estimazio-

ne oculáre, che non può tenersi per molto precisa. Oltre di che nei fiumi grandi, ed in tempo di piena, come poter fermare il tubo nel filone, ed a profondità considerabili? Anche la ventola del Sig. Ab. XIMENES è soggetta alle sue oscillazioni, ed è difficile il praticarla in tempo di acque alte. L' Autore non ne ha fatto uso finora in un' altezza di acqua, che sia maggiore di piedi 9. 9 di Parigi. Promette di tentare con essa delle sperienze nell' Arno in tempo di mezze piene. Ma in tempo di piena dispera affatto, mentre che il maggior bisogno di tali sperienze è nel colmo delle piene.

51. Il metodo, ch' io sono per proporre è appunto tale, che si può praticare anche in tempo delle piene, e con una spesa discreta, e di gran lunga minore di quella, che contemplavano il CASTELLI ed il GUGLIELMINI (45, 47). Non è altro che una modificazione del metodo del P. CABEO, voglio dire, che dove il P. CABEO adoperava delle aste *AB* (*Fig.* 12.) di legno con un peso in *B*, e con delle vessiche in *C*, io propongo delle aste consimili, ma senza vessiche, e con una parte infima *EB* (*Fig.* 14.) o di metallo, o armata di metallo in modo, che tutta l' asta *AB* sia un cilindro, ed il metallo dev' essere tanto, che l' asta così preparata posta in un' acqua stagnante abbia a mettersi da se in una positura verticale, e gal-

Fig. 12.

Fig. 14.

leg-

leggiare con una porzione *AC* di un piede, o due fuori dell' acqua. Della preparazione di queste aste (ch' io chiamo *ritrometriche*) parlerò verso il fine.

52. Intanto volendo la portata attuale di un fiume, si scielga di esso un tratto *CP'* (*Fig.* 15.) di duecento, o più tese, che sia dei più retti, e dei più regolari. Si butti una delle descritte aste in un punto *H'* quindeci, ò venti tese superiormente al punto *C*. Questa dopo alcuni bilanciamenti arriverà in *C* portata dall' acqua sensibilmente parallela a se stessa, e con moto regolare, ed equabile, e questa sia la *AB*, che supporrò inclinata all' avanti. Mostrerò come con quest' asta si possa scoprire assai prossimamente le velocità dell' acqua dalla superficie *CP'* fino al fondo *rl* lungo il cammino, che farà l'asta da *C* in *P'*.

Fig 15.

53. Convien esaminare tutte le forze, che tendono ad agitare l'asta *AB* essendo *HMLK* la curva dell' asse *IH* (12), alla quale terminano le velocità dell'acqua, che porta l'asta. Una di queste forze è il peso assoluto dell' asta stessa, il quale si può intendere come raccolto nel centro di gravità dell' asta; e codesto centro sia nel punto *D*; e la verticale *DE* esprima il peso suddetto, che (fatto il rettangolo *im*) equivale a due forze *Di*, *Dm*. Un' altra forza è quella, colla quale l' acqua spinge all' insù ogni porzione della parte immersa *CB*

 dell'

dell' asta, la qual forza, per essere la parte CB cilindrica, si può considerare come raccolta nel punto F di mezzo della stessa parte CB, e si può esprimere con una verticale FG, che (fatto il rettangolo hk) equivale alle due forze Fk, Fh. E codesta forza FG si trova eguale al peso di un volume di acqua eguale alla porzione sommersa CB dell' asta. Le altre forze, che tendono ad agitare l' asta sono le impressioni dell' acqua, che la urta dove in un modo, e dove in un altro. Imperocchè è manifesto, che l' asta non potrà muoversi tutta colla velocità massima IK, nè colla sola velocità minima NM, e che si ridurrà ad una velocità di mezzo; e questa sia la OL comune all' acqua nei punti O, P: di modo che da P in su l' acqua è più veloce dell' asta, e da P in giù è l' asta, ch' è più veloce dell' acqua. Quindi nel punto Q la velocità dell' acqua è ut, e quella dell' asta è $uS = OL$. Dunque in Q l' acqua investe l' asta colla velocità rispettiva St spingendola da Q verso S. Ma in T la velocità dell' acqua è XY, e quella dell' asta è $XZ = OL$. Dunque in T l' asta fende l' acqua colla velocità YZ; e l' acqua reagisce in T contro l' asta con quella stessa forza, colla quale investirebbe l' asta, che fosse ferma, colla velocità ZY diretta da T verso a.

54. Esprimiamo codeste forze dell' acqua. La lunghezza CB della parte immersa dell' asta si

ſi dica $= b$, ed il suo diametro $= i$. Si metta con ARCHIMEDE, che il quadrato del diametro all'aja del cerchio ſtia come 14 a 11; e ſi troverà $\frac{11 i^2}{14}$ = alla base del cilindrico CB. Dunque $\frac{11 b i^2}{14}$ sarà il volume del cilindro CB. Il peso di un egual volume di acqua ſia P. Onde $FG = P$ (53.): Si cerchi l'impreſſione Qg, che fa all'aſta normalmente uno ſtrato sottiliſſimo QSs dell'acqua colla velocità rispettiva St. Poichè b è la lunghezza del cilindro CB, ed i il suo diametro, sarà bi la sua sezione per l'aſſe. Pertanto ſi concepisca, che codeſto piano bi ſia ſituato in cb' verticalmente, e che ſia incontrato dall'acqua direttamente in tutta l'altezza cb' colla velocità $St = u$; intendo per u lo spazio, che può correre l'acqua uniformemente in un tempo $k = 1''$ colla detta velocità. La caduta libera di un grave nel detto tempo k ſia h. Si sa, che la velocità alla fine di tale caduta è $2h$. Ma come i quadrati delle velocità di un corpo cadente, così sono le cadute, o ſia le altezze dalle quali il corpo cadendo liberamente acquiſta quella velocità. Dunque facendo $4h^2 : u^2 :: h$: al quarto termine $\frac{u^2}{4h}$, queſto sarà la caduta competente alla velocità u.

55. Anche secondo le sperienze dei Signori

d'ALEMBERT, CONDORCET, e BOSSUT pubblicate l'anno 1777 l'impreſſione dell'acqua al detto piano bi è eguale al peso di un prisma di acqua, che abbia per base lo ſteſſo piano, e per altezza la trovata altezza $\frac{u^2}{4h}$ (54.), con qualche cosa di più. Non computando qui quel di più, ch'è poco, il volume dell'indicato prisma di acqua sarà $\frac{biu^2}{4h}$. Ma il peso del volume $\frac{11bi^2}{14}$ di acqua ſi è detto P (54.), e come i volumi di acqua così sono i loro peſi: dunque il peso dell'acqua del volume $\frac{biu^2}{4h}$ ſarà $\frac{7Pu^2}{22hi}$, ch'è l'impreſſione ricercata dell'acqua contro il piano bi ſituato in cb'.

56. Ora al suddetto piano s'intenda ſoſtituito un cilindro CB del diametro i. Dalle sperienze 35, ed 89 de' soprannominati Signori, ed anche da altre del Sig. BORDA fatte nell'aria (*Memorie dell' Accademia* di Parigi 1760.) raccolgo, che la detta impreſſione contro il piano bi ſta all' impreſſione contro il cilindro ſoſtituito come 20 a 11. Dunque facendo $20 : 11 :: \frac{7Pu^2}{22hi}$ (55.): al quarto termine $\frac{7Pu^2}{40hi}$, queſto sarà il peso eguale all'impreſſio-

ne

ne fatta dall' acqua al detto cilindro posto verticalmente in cb'. Sia $Hu = x$, ed $Ss = dx$. Facendo $cb' : Ss :: \frac{7Pu^2}{40hi}$: al quarto termine $\frac{7Pu^2 . Ss}{cb' . 40hi} = \frac{7Pu^2 dx}{40bhi}$, questo sarà l' impressione al cilindro verticale fatta in Ss dallo strato di acqua QSs colla velocità $u = St$. E perchè l' angolo $H'CB$ d' incidenza dell' acqua sopra l' asta io l' ho trovato sempre maggiore di un semiretto, secondo le dette sperienze del 1777, l' impressione normale al cilindro collocato in cb' all' impressione normale al cilindro CB in Q fatta dallo stesso strato di acqua QSs starà come CB a Cq essendo Cq verticale incontrata dalla orizzontale BqN. La prima trovata $= \frac{7Pu^2 dx}{40bhi}$ sia espressa con una linea orizzontale QR, e la seconda sia espressa con una Qg normale all' asta; e sia $HI = m$, $HN = n$, ed $HO = q$: onde $IN = m - n = Cq$, e si avrà CB ($= b$): Cq ($= m - n$):: QR $\left(= \frac{7Pu^2 dx}{40bhi} \right)$: $Qg =$ $\frac{7P.(m-n).u^2 dx}{40b^2 hi}$, essendo $u^2 dx = (St)^2 . Ss$; onde $\int Qg = \frac{7P.(m-n)}{40b^2 hi} \int (St)^2 . Ss$. Nell' integrazione la costante si determina mettendo l' integrale $= 0$ quando $x = HO =$

q.

q. Facendo di poi $x = HI = m$ si avrà la somma delle Qg da P fino in C.

57. Sarà $Ou = x - q$; e perchè $Cq : CB :: Ou : PQ$, sarà $m - n : b :: x - q : PQ = \frac{b.(x-q)}{m-n}$; onde $PQ . Qg = \frac{7P.(x-q).u^2 dx}{40bhi}$, ch' è il momento di ogni Qg riferito al punto P. E la somma di questi momenti divisa per la somma delle Qg, cioè $\frac{\int PQ . Qg}{\int Qg}$ darà la distanza del centro delle forze Qg dal punto P, com' è noto.

58. Nella integrazione si operi come si è detto al n. 56. E quando $x = HI = m$, cioè quando PQ diviene PC, la detta distanza del centro delle forze Qg da P sia Pn; ed nx normale all' asta sia in tal caso $\int Qg$ (56.), così si avrà $Pn = \frac{\int PQ . Qg}{nx}$, e tutte le Qg distribuite lungo la PC equivaleranno alla sola nx applicata in n.

59. Lo stesso discorso si può applicare al caso di uno strato TZz di acqua preso al di sotto del punto P. In questo caso essendo $x = HX$, sarà $dx = Zz$, ed $u = YZ$, velocità colla quale l' acqua reagisce in T con una forza, che equivale all' impressione dello strato TZz se essendo l' asta ferma l' acqua la incontrasse colla velocità YZ diretta da Z verso T,

e

e coll' angolo d' incidenza $ZTC = H'CB$ (56.). Codesta impressione qui pure considerata normale all' asta sia Tb, e si troverà $Tb = \frac{7P.(m-n).u^2dx}{40b^2hi}$ (57.) essendo $u^2dx =$ $(YZ)^2 . Zz$; onde $\int Tb = \frac{7P.(m-n)}{40b^2hi}\int(YZ)^2.Zz$. Integrando la costante si trova mettendo l' integrale $= 0$ allorchè sia $x = HN = n$; facendo di poi $x = HO = q$ si avrà la somma delle Tb da B fino in P.

60. Poichè qui $x = HX$ sarà $OX = q - x$. Ma $Cq : CB :: OX : PT$, dunque $m - n : b :: q - x : PT = \frac{b.(q-x)}{m-n}$; ed il momento delle Tb riferito al punto P sarà $PT.Tb = \frac{7P.(q-x).u^2dx}{40bhi}$. E la somma di questi momenti divisa per la somma delle Tb darà la distanza del centro delle impressioni Tb dal punto P.

61. Nell' integrazione la costante si determini come al n. 59. E quando $x = HO = q$, cioè quando BT diviene BP, la detta distanza sia Po, ed oy normale all' asta sia in tal caso $\int Tb$ (59.), e così si avrà $Po = \frac{\int PT.Tb}{oy}$, e tutte le Tb distribuite lungo la BP equivaleranno alla sola oy applicata in o.

62. Ora perchè l' asta arrivata in C è ridotta

dotta a un moto regolare (52.), nè si alza, nè si abbassa, devono essere eguali le due forze contrarie Fk, Di. E perchè i due triangoli FkG, DiE sono simili, sarà anche $FG = DE$, e $kG = iE$, cioè $Fh = Dm$.

63. E perchè il moto dell' asta è equabile (52.), e non accelerato, nè ritardato, le forze $nx + Dm$, che tendono ad accelerare il moto, saranno eguali alle contrarie $oy + Fh$, che tendono a ritardare lo stesso moto; e perchè si è trovato $Fh = Dm$ (62.), sarà ancora $nx = oy$; o sia $\int Qg = \int Tb$, cioè $\frac{7P.(m-n)}{40b^2hi}\int (St)^2 . Ss = \frac{7P.(m-n)}{40b^2hi} \times \int (YZ)^2 . Zz$ (56, 59.), onde $\int (St)^2 . Ss = \int (YZ)^2 . Zz$ (A) prendendo le St da L fino in c, e le YZ da p fino in L.

64. E finalmente perchè l'asta viaggia parallela a se stessa (52.) il centro delle forze nx, Dm dovrà coincidere col centro delle forze contrarie oy, Fh. Il primo dee cadere sopra il punto D, ed il secondo sotto il punto F. Dunque devono coincidere in un qualche punto V fra D, ed F. Quindi si avrà $nx : Dm :: VD : Vn = \frac{VD . Dm}{nx}$; ed insieme oy :

Fh

$Fh :: VF : Vo = \frac{VF \cdot Fh}{oy}$. Dunque $Vn + Vo$ $= \frac{VD \cdot Dm}{nx} + \frac{VF \cdot Fh}{oy}$. Ma si è trovato Dm $= Fh$ (62.), ed $nx = oy$ (63.). Dunque $Vn + Vo = \frac{VD \cdot Fh}{nx} + \frac{VF \cdot Fh}{nx} =$ $\frac{(VD + VF) \cdot Fh}{nx} = \frac{DF \cdot Fh}{nx}$.

65. Ma $Vn + Vo = Pn + Po =$ $\frac{\int PQ \cdot Qg}{nx}$ (58.) $+ \frac{\int PT \cdot Tb}{oy = nx}$ (61, 63.). Dunque $\frac{DF \cdot Fh}{nx} = \frac{\int PQ \cdot Qg}{nx} + \frac{\int PT \cdot Tb}{nx}$, cioè $DF \cdot Fh = \int PQ \cdot Qg + \int PT \cdot Tb =$ $\int \frac{7P \cdot (x - q) \cdot u^2 dx}{40bhi}$ (57.) $+ \int \frac{7P \cdot (q - x) \cdot u^2 dx}{40bhi}$ (60.) $= \frac{7P}{40bhi} \left(\int (x - q) \cdot u^2 dx + \int (q - x) \cdot u^2 dx \right)$.

66. E perchè $CB : Bq :: FG : Fh$ sarà $Fh =$ $\frac{Bq \cdot FG}{CB} = \frac{Bq \cdot P}{b}$ (54.); e fatta $DF = e$, sarà $DF \cdot Fh = \frac{Bq \cdot Pe}{b} =$ (65.) $\frac{7P}{40bhi} \times$ $\left(\int (x - q) \cdot u^2 dx + \int (q - x) \cdot u^2 dx \right)$, cioè

Bq

$Bq = \frac{7}{40ehi} \times \left(\int (x - q) \cdot u^2 dx + \int (q - x) \cdot u^2 dx \right) (B)$.

67. Fatti questi preparativi mi propongo da sciogliere il seguente problema. Date la lunghezza CB della porzione immersa dell'asta, la DF distanza del centro D di gravità dell' asta dal punto F di mezzo della sua porzione immersa, la velocità OL dell' asta, la velocità superficiale IK dell' acqua, e dato l' angolo ACI d' inclinazione dell' asta e in conseguenza il suo complemento BCq, trovare una curva KLH, o una retta KLQ', che essendo scala delle velocità della verticale IS' soddisfaccia ai dati suddetti.

68. Primieramente esamino il caso più semplice, cioè se una retta KLQ' soddisfaccia ai dati esposti. In questo caso le x invece di partire dal punto H partono dal punto Q', e le HI, HO, HN divengono $Q'I = m$, $Q'O = q$, $Q'N = n$, e le St, ZY divengono Si, Zf, onde giusta il *n.* 63. qui si deve avere $\int (Si)^2 \cdot Ss = \int (Zf)^2 \cdot Zz$. E perchè $Q'O : OL :: LS : Si$, sarà $q : OL :: x - q : Si = \frac{OL \cdot (x - q)}{q}$, e $\int (Si)^2 \cdot Ss = \int \frac{(OL)^2 \cdot (x-q)^2 \cdot dx}{q^2}$, e (come si è detto al *n.* 56.) integrando in modo, che quando $x = Q'O = q$ l' integra-

le

le sia nullo, si avrà $\frac{(OL)^2.(x-q)^3}{3q^2}$; e fatta indi $x = Q'I = m$ si avrà $\int (Si)^2 . Ss = \frac{(OL)^2.(m-q)^3}{3q^2}$. Similmente $Q'O : OL :: LZ : Zf$, cioè $q : OL :: q - x : Zf = \frac{OL.(q-x)}{q}$, onde $(Zf)^2. Z\zeta = \frac{(OL)^2.(q-x)^2.dx}{q^2}$; ed integrando così, che quando $x = Q'N = n$ l'integrale sia nullo (59.), indi facendo $x = q$ si avrà $\int (Zf)^2 . Z\zeta = \frac{(OL)^2.(q-n)^3}{3q^2}$. Dovendo pertanto le due somme essere eguali (63.) si trova $m - q = q - n$, cioè $OI = ON$. Il che fa vedere, che qualunque sieno le due velocità date IK, OL, purchè tutte le velocità della verticale IS' terminino ad una retta, quella velocità OL dell'acqua, ch'è comune all'asta, corrisponde a un punto O, che dee essere di mezzo della IN; e che in conseguenza la velocità dell'asta in tal caso è la velocità media di tutte le velocità dell'acqua della verticale IN.

69. Essendosi detta al n. 54. $St = u$, in questo caso sarà $u = Si = \frac{OL.(x-q)}{q}$ (68), e $\int (x-q). u^2 dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \int (x-q)^3 . dx$.

Fatto

Fatto l'integrale nullo allorchè sia $x = Q'O = q$, indi fatta $x = Q'I = m$, si avrà $\int (x - q) \cdot u^2 dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \cdot \frac{(m-q)^4}{4}$. Essendosi pur detta $ZY = u$, in questo caso sarà $u = Zf = \frac{OL \cdot (q - x)}{q}$ (68); e $\int (q - x) \cdot u^2 dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \int (q - x)^3 dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \cdot \frac{(q-n)^4}{4}$ (fatto l'integrale nullo quando $x = Q'N$, e fatta indi $x = Q'O = q$). Dunque $\int (x-q)\, u^2 dx + \int (q - x) \cdot u^2 dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \times \left(\frac{(m-q)^4}{4} + \frac{(q-n)^4}{4}\right) = \frac{(OL)^2}{q^2} \cdot \frac{(m-q)^4}{2}$ (essendosi trovato al n. 68. $m - q = q - n$). Dunque secondo il n. 66. sarà $Bq = \frac{7}{40ehi} \times \frac{(OL)^2}{q^2} \cdot \frac{(m-q)^4}{2} = \frac{7 \cdot (OL)^2 \cdot (m-q)^4}{80 hiq^2}$. Se si dirà $IN = c$, $IK = f$, $OL = g$, poichè $OI = ON$ (68), sarà $OI = \frac{1}{2}c = m - q$. E perchè $Q'I : IK :: Q'O : OL$, sarà $m : f :: q : g$, e $q = \frac{gm}{f}$; ed $m - q = \frac{1}{2}c = m - \frac{gm}{f}$; onde $m = \frac{cf}{}$

$\frac{cf}{2.(f-g)}$, e $q = \frac{gm}{f} = \frac{cg}{2.(f-g)}$. Sostituendo si avrà $Bq = \frac{7c^2.(f-g)^2}{320hie}$.

70. Venendo a un caso particolare, in cui sia per esempio la velocità superficiale *IK* di 10 piedi per ogni minuto secondo, l'altra *OL* dell'asta di piedi 8, la $DF = e$ (53, 66) = pi. 3; la caduta *h* di un grave in 1″ = piedi 15, il diametro *i* dell'asta di due pollici, o sia = $\frac{1}{6}$ di piede, la *IN* da dedursi dalla lunghezza *CB* nota, e dall'angolo *BCq* dato, di piedi 12, e la *IS'* di piedi 14 sarà $c = 12$, $f = 10$, $g = 8$, $e = 3$, $h = 15$, $i = \frac{1}{6}$, e *Bq* (69) = 1, 68, cioè l'angolo *BCq* di gr. 7, 58′.

71. Se pertanto l'angolo già dato sarà di gr. 7, 58′, la vena *KLQ'* quadrerà esattamente a tutti i dati del Problema, e si potrà dire, che la *KLd* sia (almeno prossimamente) la scala della velocità della verticale *IN*; e quando *IN* formi una buona parte della *IS'* si potrà ragionevolmente concludere, che tutte le velocità della verticale *IS'* terminino alla retta *KLl*. Per la qual cosa essendosi detta *IS'* di piedi 14, l'aja *IS'lK* sarà di piedi quadrati 107, 33, cioè in ogni minuto secondo per la verticale *IS'* passerà un velo di acqua di piedi 107, 33 quadrati; i quali divisi per tutta l'altezza *IS'* di piedi 14 danno una velocità media di piedi 7 $\frac{2}{3}$.

72.

72. Ma se in vece di gr. 7, 58′ fosse stato dato un angolo maggiore oltre gli altri dati del n. 70, si dovrà concludere, che le velocità della verticale *IS* non terminano a una retta, ma bensì a una curva *KLH*. Per rinvenire una curva, che soddisfaccia ai dati, io ricorro alla famiglia delle Parabole, giacchè ognuna di queste applicata come la *HLK* importa, che dalla superficie al fondo il decrescimento di velocità si faccia sempre maggiore, come richiede la mia teoria, che non discorda dalle sperienze.

73. Si esamini pertanto in secondo luogo se la *HLK* fosse una parabola cubica di secondo genere della equazione $px^2 = y^3$. Poichè $y = \sqrt[3]{px^2}$ quando $x = Hu$ sarà $dx = Ss$, ed $y = ut = \sqrt[3]{px^2}$; e quando $x = HO = q$ sarà $y = \sqrt[3]{pq^2}$. Dunque $St = ut - OL = \sqrt[3]{px^2} - \sqrt[3]{pq^2}$, e $\int (St)^2 . Ss = \int (\sqrt[3]{px^2} - \sqrt[3]{pq^2})^2 . dx$. Integrando per modo, che quando $x = HO = q$ l'integrale sia nullo; indi facendo $x = HI = m$ si avrà

$$\int (St)^2 . Ss = \sqrt[3]{p^2} \left(\frac{3m^2 \sqrt[3]{m}}{7} - \frac{6m \sqrt[3]{q^2 m^2}}{5} + qm\sqrt[3]{q} - \frac{8q^2 \sqrt[3]{q}}{35} \right).$$

Quando poi sia x =

$= HX$ si avrà $dx = Z\zeta$, ed $y = XY = \sqrt[3]{px^2}$, onde $YZ = OL - XY = \sqrt[3]{pq^2} - \sqrt[3]{px^2}$, $\int (YZ)^2 \cdot Z\zeta = \int (\sqrt[3]{pq^2} - \sqrt[3]{px^2})^2 \cdot dx$; ed integrando così, che quando $x = HN = n$ si abbia zero, indi facendo $x = HO = q$ si troverà $\int (YZ)^2 \cdot Z\zeta = \sqrt[3]{p^2} \times \left(\frac{8q^2\sqrt[3]{q}}{35} - \frac{3}{7}n^2\sqrt[3]{n} + \frac{6n\sqrt[3]{q^2n^2}}{5} - qn\sqrt[3]{q}\right)$.

74. E perchè le due somme ritrovate devono esser eguali (63.) si troverà $\frac{16q^2\sqrt[3]{q}}{35} - \frac{3}{7}\cdot(m^2\sqrt[3]{m} + n^2\sqrt[3]{n}) + \frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2} \times (m\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{n^2}) - q\sqrt[3]{q}\cdot(m+n) = 0$.

75. Poichè $St = u$ (54) $= \sqrt[3]{px^2} - \sqrt[3]{pq^2}$ (73), sarà $\int (x - q)\cdot u^2 dx = \int (x - q)\cdot(\sqrt[3]{px^2} - \sqrt[3]{pq^2})\cdot dx =$ (riducendo l'integrale al zero allorchè $x = q$, indi facendo $x = m$) $\sqrt[3]{p^2} \times \left(\frac{3m^3\sqrt[3]{m}}{10}\right.$

 —

$- \frac{3m^2 \sqrt[3]{q^2m^2}}{4} + \frac{qm^2 \sqrt[3]{q}}{2} - \frac{3qm^2 \sqrt[3]{m}}{7} +$

$\frac{6qm \sqrt[3]{q^2m^2}}{5} - q^2m \sqrt[3]{q} + \frac{5q^3 \sqrt[3]{q}}{28}$). Così perchè quando $x = HX$ si è detta $YZ = u$ (59) $= \sqrt[3]{pq^2} - \sqrt[3]{px^2}$ (73), sarà $\int (q-x).u^2dx = \int (q-x).(\sqrt[3]{pq^2} - \sqrt[3]{px^2})^2.dx$ = (mettendo l'integrale = o quando $x = n$, indi facendo $x = q$) $\sqrt[3]{p^2} \times$

$\left(\frac{5q^3 \sqrt[3]{q}}{28} + \frac{3n^3 \sqrt[3]{n}}{10} - \frac{3n^2 \sqrt[3]{q^2n^2}}{4} + \right.$

$\left. \frac{qn^2 \sqrt[3]{q}}{2} - \frac{3qn^2 \sqrt[3]{n}}{7} + \frac{6qn \sqrt[3]{q^2n^2}}{5} - q^2n \sqrt[3]{q} \right).$

76. Dunque Bq (66) $=$

$\frac{7}{40ehi} \times \int . \left((x-q).u^2dx + \int (q-x).u^2dx \right) =$

$\frac{7 \sqrt[3]{p^2}}{40ehi} \times \left(\frac{3}{10} . (m^3 \sqrt[3]{m} + n^3 \sqrt[3]{n}) - \right.$

$\frac{3}{4} \sqrt[3]{q^2} . (m^2 \sqrt[3]{m^2} + n^2 \sqrt[3]{n^2}) + \frac{1}{2} q \sqrt[3]{q} \times$

$(m^2 + n^2) - \frac{3}{7} q . (m^2 \sqrt[3]{m} + n^2 \sqrt[3]{n})$

$+ \frac{6}{5} q \sqrt[3]{q^2} . (m \sqrt[3]{m^2} + n \sqrt[3]{n^2}) -$

$\left. q^2 \sqrt[3]{q} . (m + n) + \frac{5q^3 \sqrt[3]{q}}{14} \right).$

77.

77. Colla equazione del n. 74. convien trovare nei casi particolari quale sia fra le infinite parabole della equazione $px^2 = y^3$ quella, che si potrebbe confare coi dati del Problema a riserva dell' angolo d' inclinazione dell' asta; per passare indi a vedere colla equazione del n. 76. se quella parabola così trovata si confaccia ancora coll' angolo dell' asta già dato. Perciò ritorno all' esempio del n. 70, dove si è fatta $IK = 10$, $OL = 8$, $DF = e = 3$, $h = 15$, $i = \frac{1}{6}$, ed $IN = m - n = 12$. Quindi sarà $n = m - 12$; e per la natura della parabola cubica di secondo genere sarà $(IK)^3 : (OL)^3 :: (IH)^2 : (OH)^2$, cioè $1000 : 512 :: m^2 : q^2$; onde $q = m\sqrt{\frac{512}{1000}} = m - OI$. Dunque $m = \frac{OI\sqrt{1000}}{\sqrt{1000} - \sqrt{512}}$. Poichè la somma dei quadrati delle St da L sino in c dev' essere eguale alla somma dei quadrati delle YZ da L sino in p (63), accade, che il punto O si trova sempre poco sotto il punto di mezzo della IN, onde se nella formola trovata $\frac{OI\sqrt{1000}}{\sqrt{1000} - \sqrt{512}}$ si metta $OI = \frac{IN}{2}$, si avrà un valore, che di poco mancherà dal giusto valore della m. Quindi perchè IN si è fatta $= 12$, mettendo nella detta formola $OI = 6$ si avrà $21\frac{2}{9}$, ch' è un li-

limite della m, o sia un valore minore, ma di poco, della m.

78. Infatti si metta $m = 21\frac{7}{9}$. Così sarà $n = HI - IN = 21\frac{7}{9} - 12 = 9\frac{7}{9}$, e q (trovata qui sopra $= m\sqrt{\frac{512}{1000}}$) $= 15, 58$. Fatta la sostituzione di questi valori delle m, n, q nella equazione del n. 74, i termini, che la compongono, danno 0, 002 (si veda il calcolo nel fine), il che mostra che si può prendere $21\frac{7}{9}$ pel vero valore della m. E perchè $p = \frac{y^3}{x^2}$, sarà $p = \frac{(IK)^3}{(HI)^2} = \frac{1000}{m^2} = 2, 109$. Sostituiti questi valori delle m, n, q, p nella equazione ultima del n. 76 si avrà $Bq = 1, 78$, che dà l'angolo BCq di gr. 8, 26′.

79. Quindi se l'angolo già dato (67) sarà stato per l'appunto di gr. 8, 26′ la parabola cubica così trovata HLK quadrerà esattamente con tutti i dati del Problema, e si potrà dire, che la scala delle velocità della verticale IN sia assai prossimamente l'arco MLK della parabola suddetta, e qualora la NS' sia piccola porzione della IS', sarà ragionevole il concludere, che le velocità di tutta la verticale IS' terminino alla stessa parabola HLK. Quindi fatta la IS' di piedi 14, l'aja $IS'V'K$, ch'è $\frac{3}{5}HI.IK - \frac{3}{5}.HS'.S'V'$, sarà di piedi quadrati 107, 17; che esprimeranno la portata della verticale IS', o sia il velo d'acqua, che in 1″ passa per

la

la verticale ſteſſa. E dividendo per $IS' = 14$ il detto velo ſi avrà piedi 7, 65, velocità media delle velocità da I ſino in S'.

80. Che ſe l'angolo già dato (67) foſſe maggiore del trovato qui ſopra, ſi paſſi ad eſaminare in terzo luogo ſe la curva ricercata foſſe una parabola conica della equazione $px = y^2$.

81. Operando come ſi è fatto rapporto alla parabola cubica di ſecondo genere in luogo della equazione del n. 74 dedotta dal n. 63 ſi avrà $8\sqrt{q}(m\sqrt{m} + n\sqrt{n}) + 2q^2 - 6q \times (m + n) - 3m^2 - 3n^2 = 0$.

82. Ed in luogo della equazione del n. 76 dedotta dal n. 66 qui ſi avrà $Bq\ (66) = \frac{7p}{40ehi} \times [\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{4}{5}\sqrt{q}(m^2\sqrt{m} + n^2\sqrt{n}) + \frac{4}{3}q\sqrt{q}(m\sqrt{m} + n\sqrt{n}) - q^2(m + n + \frac{4}{5}q^3)]$.

83. Qui pure ripiglio, come al n. 77, le determinazioni fatte per l'eſempio del n. 70, coſicchè eſſendo $IN = 12 = m - n$, ſarà $n = m - 12$; e per la natura della parabola conica ſarà $\overline{IK}^2 : \overline{OL}^2 :: IH : OH$, cioè $100 : 64 :: m : q = \frac{64m}{100}$. Ma $q = HO = HI - OI = m - OI$. Dunque $\frac{64m}{100} = m - OI$, ed $m = \frac{100OI}{36}$. Un limite della m ſi troverà ſempre colla regola del n. 77, cioè facendo l'ipo-

tesi di $OI = \frac{ON}{2} =$ (in quest' esempio) 6; onde qui risulta $m = 16\frac{2}{3}$. Si metta dunque prima $m = 16\frac{2}{3}$. E sarà $n = m - 12 = 4\frac{2}{3}$: e $q = \frac{64m}{100} = 10\frac{2}{3}$. Sostituendo questi valori delle m, n, q nell' equazione del n. 81; si ottiene 4, 73. Mettendo in appresso $m = 17$, sarà $n = m - 12 = 5$, e $q = 10, 88$. Sostituiti questi nuovi valori delle m, n, q nella stessa equazione del n. 81, i termini che la compongono danno $-115, 61$; il che mostra, che il giusto valore della m sta fra il $16\frac{2}{3}$ ed il 17; e col metodo noto si trova $m = 16, 68$: onde $n = m - 12 = 4, 68$, e $q = \frac{64m}{100} = 10, 67$; e $p = \frac{(IK)^2}{IH} = \frac{100}{m} = 5,99$. Sostituiti questi valori delle m, n, q, p nel valore della Bq trovata al n. 82 si ha $Bq = 2, 11$, che dà l' angolo BCq di gr. 9. 58'.

84. Dunque se l' angolo già dato (67) fosse appunto di gr. 9, 58' la parabola conica trovata sarà in quest' esempio la curva ricercata, perchè soddisfa a tutti i dati del Problema; e fatta IS' di piedi 14 l' aja $IS'V'K$ sarà di piedi quadrati 104, 14 portata della verticale IS', che divisi per 14 danno la velocità media di piedi 7, 43.

85. Ma se l' angolo dato fosse fra i gr. 8,26' trovati al n. 78, ed i gr. 9, 55' trovati

vati al n. 83, si passi ad esaminare una qualche parabola intermedia. Mi spiego. Si metta l' equazione $px^{29} = y^{30}$, e si vada scemando l' esponente dalla x di una unità per volta accrescendo ogni volta pure di una unità l' esponente della p, e si avrà la serie di equazioni

$px^{29} = y^{30}$

$p^2x^{28} = y^{30}$

$p^3x^{27} = y^{30}$

ec.

così si arriverà alle seguenti

$p^{10}x20 = y^{30}$ . . . . . cioè $px^2 = y^3$

$p^{11}x^{19} = y^{30}$

$p^{12}x^{18} = y^{30}$ . . . . . . $p^2x^3 = y^5$

$p^{13}x^{17} = y^{30}$

$p^{14}x^{16} = y^{30}$ . . . . . $p^7x^8 = y^{15}$

$p^{15}x^{15} = y^{30}$ . . . . . . $px = y^2$

$p^{16}x^{14} = y^{30}$ . . . . . . $p^8x^7 = y^{15}$

$p^{17}x^{13} = y^{30}$

$p^{18}x^{12} = y^{30}$ . . . . . . $p^3x^2 = y^5$

ec.

Le dette equazioni cominciando dalla prima $px^{29} = y^{30}$, poste all' esame simile al già fatto delle due $px^2 = y^3$, $px = y^2$, danno un angolo sempre maggiore, cosicchè se l' angolo dato sarà fra i due ritrovati colle dette due equazioni converrà tentare altri esami di alcune delle qui esposte quattro equazioni intermedie fra le dette due $px^2 = y^3$, $px = y^2$, finchè si arrivi a quella, che soddisfaccia intie-

 ra-

ramente, o sufficientemente al Problema. E quando mai nè anche fra le dette quattro equazioni intermedie si trovasse quella, che quadri quanto si desiderasse, si potrà sempre instituire un' altra serie di equazioni, che parta da una cogli esponenti più alti, come sarebbe se si partisse dall' equazione $px^{99} = y^{100}$, e per tal maniera c' incontreremo finalmente in una parabola, che soddisfaccia con quella precisione, che un volesse, al Problema.

86. Lo stesso discorso si applichi opportunamente al caso, in cui l' angolo dato fosse fra i gr. 7, 58′ trovati al n. 70, ed i gr. 8, 26′ trovati al n. 78; come pure si applichi al caso, in cui l' angolo dato fosse maggiore dell' angolo di gr. 9, 58′ trovati al n. 83; con che parmi di avere sciolto il Problema propostomi al n. 67, che tende a trovare non tanto la portata della verticale *IS′*, quanto la legge dei decrescimenti della velocità della superficie fino al fondo.

87. Vedo benissimo, che quantunque si trovi una tal parabola, che quadri intieramente alle condizioni del Problema, non per questo è dimostrato, che la vera scala delle velocità sia quella stessa parabola, potendo essere, che nel tempo stesso la vera scala delle velocità fosse per esempio una ellisse. Ma ognun vede ancora che perchè una ellisse soddisfaccia a tutte le medesime condizioni del Problema, cui sod-

soddisfa una parabola, convien che quella ellisse si adatti così all'arco MLK della parabola trovata, che le conseguenze dedotte dalla Parabola debbano essere prossimamente quelle, che si dedurrebbero dalla ellisse.

88. Per agevolare il metodo esposto darò qui la formola generale del limite della m da trovarsi colla regola accennata al n. 77. Sia pertanto $p^c x^r = y^{c+r}$ l'equazione generale delle parabole. Poichè quando $x = HI$ è $y = IK$, onde $p^c(HI)^r = (IK)^{c+r}$, e quando $x = HO$ è $y = OL$, onde $p^c(HO)^r = (OL)^{c+r}$, sarà $p^c = \frac{(IK)^{c+r}}{(HI)^r} = \frac{(OL)^{c+r}}{(HO)^r} = \frac{(OL)^{c+r}}{(HI-OI)^r}$, dal che si trova $HI = m =$

$$\frac{OI\sqrt[r]{(IK)^{c+r}}}{\sqrt[r]{(IK)^{c+r}} - \sqrt[r]{(OL)^{c+r}}},$$ ed

$$\frac{\frac{IN}{2}\sqrt[r]{(IK)^{c+r}}}{\sqrt[r]{(IK)^{c+r}} - \sqrt[r]{(OL)^{c+r}}},$$ limite prossimamente minore della m (77).

89. Quindi se si dovesse prendere in esame l'equazione $p^3x^2 = y^5$ sarebbe $c = 3$, $r = 2$,

onde

onde il limite sarebbe $\dfrac{\frac{IN^2}{2}\sqrt{(IK)^5}}{\sqrt[2]{(IK)^5} - \sqrt[2]{(OL)^5}}$

$=$ (giusta il n. 70) $\dfrac{6\sqrt{10^5}}{\sqrt{10^5} - \sqrt{8^5}} = 14$ prossimamente, limite della $m = HI$. Con questo solamente si conosce subito, che la equazione $p^3 x^2 = y^5$ non può essere al caso contemplato finora di $IS = $ piedi 14, perchè essendo $m = $ piedi 14, o poco più (77), il vertice H caderebbe quasi sul fondo del fiume, onde sopra quel fondo l'acqua non avrebbe quasi moto, il che non è vero.

90. Il Sig. Ab. XIMENES dice di aver trovato colle sue sperienze, che la velocità presso il fondo era di un quinto minore della velocità alla superficie. Ma quelle sperienze sono state fatte in piccoli corsi di acque, e crescendo la velocità cresce ancora la resistenza del medesimo fondo; per la qual cosa è da aspettarsi, che in tempo di piena la velocità dalla superficie al fondo cali sensibilmente più di un quinto. Inclino bensì a credere, che non arrivi a calare la metà. In questa ipotesi, che dee potersi verificare se non altro colle mie aste ritrometriche, pare che nell'esempio del n. 70 contemplato fin qui non possa aver luogo nè anche la parabola conica, giacchè questa nel detto esempio importerebbe un decrescimento

di

di velocità dalla superficie al fondo più della metà, perchè per essere $HI = 16,68$ (83), $IK = 10$, ed $HS' = 2,68$, si trova l'ordinata SV' al fondo di piedi 4,008. Meno poi per una simil ragione possono appartenere al detto esempio le altre equazioni della serie del n. 85 dalla equazione $px = y^2$ in giù. Ma le portate della verticale IS', che risultano colle equazioni della detta serie sino alla $px = y^2$ stanno fra i piedi quadrati 107,17 (79), e 104,14 (84), che si discostano di poco dalla portata di pi. q. 107, 33 trovata al n. 71 nella ipotesi, che le velocità terminino ad una retta. Dunque quando non si cerchi la scala delle velocità, ma soltanto la portata della verticale IS', e che non si curi di aver questa con tutto il rigore (il quale in molti casi è superfluo) si potrà ottenere l'intento a sufficienza (ed al certo cento volte meglio, che con qualunque degli altri metodi finora proposti) stando all'ipotesi, che le velocità terminino ad una retta, come al n. 71. Ed in questo caso si declina dal fastidio di quei calcoli prolissi, che occorrono nelle ipotesi, che la scala delle velocità sia una qualche curva, e l'angolo d'inclinazione dell'asta (ch'è il più difficile da rilevarsi) in questo caso basterà che si abbia affatto all'ingrosso, per poter dedurre da esso la Cq, la quale con tre, o quattro gradi di più, o di meno riesce sensibilmente la medesima.

91.

91. Mi si potrebbe fare la seguente obbiezione. Non è così facile il trovare in ogni fiume un tratto di 200 tese, che sia così regolare, onde l'acqua vi corra con quella equabilità di moto, che richiederebbe lo sperimento; perchè anche nei tratti meno irregolari si danno delle ineguaglianze sensibili, e frequenti, per le quali la velocità dell' acqua varia non una, ma più volte ora crescendo, dove la sezione diviene alquanto minore, ed ora calando, dove la sezione si fa alquanto maggiore. Quindi è, che dove il fiume affretta il suo moto, l'asta a cagione della sua inerzia tarderà a concepire la velocità sua terminale conveniente a quel nuovo maggior corso dell' acqua, e rimarrà troppo indietro; e dove l'acqua rallenterà il suo moto, l'asta riterrà per la sua inerzia per qualche tempo una velocità maggiore del dovere, e scorrerà troppo avanti, il che può fare, che la velocità dell' asta discordi da quelle velocità, ch' io mi son figurato nella ipotesi di un corso equabile dell' acqua, e che perciò non sieno per valere le deduzioni da me esposte.

92. Ma qui rispondo, che le mie aste sono molto ubbidienti ai moti dell' acqua, cosicchè in un passaggio da una velocità ad altra l'errore indicato non può essere, che tenue, come spiegherò in appresso. E nel caso di parecchj di tai passaggi da una velocità minore ad una maggiore, e poi da una maggiore ad

una

una minore, ec. dico, che ſiccome l'errore al creſcere della velocità del fiume è in difetto, e nel calare della velocità del fiume è in eccesso, dandoſi parecchj di tali errori nel tratto dello ſperimento perchè all' uno in difetto dee ſuccederne un altro in eccesso, dovrà accadere che l'uno compenſi l'altro di mano in mano, coſicchè alla fine dello ſperimento l'errore totale ſia tuttavia tenue, e traſcurabile.

93. Per fare poi comprendere, come ho promeſſo, che le mie aſte ritrometriche devono eſſere molto ubbidienti ai moti dell' acqua, prima darò di queſto una congettura forte dedotta dalla teoria, e poi verrò alla ſperienza, e particolarmente ad uno ſperimento immediato, e ch'io giudico deciſivo, fatto colle aſte medeſime. Pertanto ſi metta, che una delle accennate aſte galleggi verticale, e quieta in un'acqua ſtagnante, e che il ſuo centro di gravità cada appunto nel mezzo della parte ſommerſa. Allora l' acqua concepiſca a un tratto una velocità orizzontale, ed eguale in ſuperficie, e ſotto la ſuperficie. In tal caſo ſi potrà conſiderare l'azione dell' acqua corrente contro l'aſta come raccolta nel punto di mezzo della detta parte ſommerſa. E perchè nel medeſimo punto cade anche il centro di gravità dell' aſta, ne viene, com' è noto, che l'aſta ſi muoverà ſempre parallela a ſeſteſſa, e perciò verticale. La velocità dell' acqua ſi dica $= c$, e la velocità

cità dell' asta, che sarà crescente, dopo un qualche tempo t si dica V, e la velocità rispettiva dell' acqua contro l' asta, cioè $c - V$, si dica u. Giusta il n. 56. sarà $\frac{7Pu^2}{40hi}$ l' impressione dell' acqua sopra l' asta, essendo P il peso dell' asta, h la caduta di un grave in un tempo $k = 1''$, ed il diametro dell' asta cilindrica sia $= i$. Secondo le note formole si avrà $2h \cdot \frac{7Pu^2}{40hi} \cdot dt = kPdV$. E perchè si è detto $c - V = u$ si troverà $\frac{7dt}{20ki} = \frac{dV}{(c - V)^2}$. Ed integrando così, che quando $t = 0$ sia $V = 0$, si troverà $t = \frac{20ki}{7c} \cdot \frac{V}{c - V}$.

94. Poichè gli aumenti, e decrementi di velocità, che possono accadere in un tratto del fiume scielto pel più regolare non dovrebb' essere maggiore di un piede per ogni minuto secondo, si metta, che la velocità c, che si suppone al n. 93. concepita a un tratto dall' acqua prima stagnante, sia di un piede per ogni minuto secondo, onde sia $c = 1$; ed il diametro i dell' asta si metta di due pollici, o sia di $\frac{1}{6}$ di piede, e $k = 1''$, e si cerchi in quanto tempo l' asta avrà concepita la metà della velocità dell' acqua, e poi in quanto tempo avrà concepito $\frac{9}{10}$ della velocità stessa dell' acqua, per la qual cosa si dovrà mettere pel pri-

primo caso $V = \frac{1}{2}$, e pel secondo $V = \frac{9}{10}$; e si troverà, che l'asta avrà guadagnato la metà della velocità dell'acqua in meno di un mezzo minuto secondo, e che l'avrà guadagnata quasi tutta, cioè $\frac{9}{10}$ in poco più di 4″.

95. E se l'asta invece di essere verticale si trovasse inclinata con un angolo per esempio di 30 gradi, l'impressione $\frac{7Pu^2}{40hi}$ del caso precedente starebbe all'impressione di questo caso come il raggio al coseno di gr. 30 (56), cosicchè questa sarebbe prossimamente $\frac{3Pu^2}{10hi}$; e replicando il calcolo dei n. 93, 94 si trova $t = \frac{10ki}{3c} \cdot \frac{V}{c-V}$, e che l'asta avrà guadagnato la metà della velocità dell'acqua in 33‴, e che l'avrà guadagnata quasi tutta, cioè $\frac{9}{10}$ in 5″.

96. Se avessi attribuito all'acqua quella qualunque viscosità, che sembra non potersi negare all'acqua dei fiumi torbidi, il che avrei potuto fare nell'ultimo caso mettendo l'impressione dell'acqua $= \frac{3Pu^2}{10hi} + \frac{P}{r}$, intendendo per r un numero comunque grande (purchè finito), avrei trovato una puntualità anche maggiore dell'asta in concepire i $\frac{9}{10}$ della velocità dell'acqua; anzi avrei trovato, che in

bre-

breve avrebbe concepito tutta intiera la velocità dell' acqua. Ella è questa la da me indicata congettura forte dedotta dalla teoria per dire, che le mie aste siano per essere molto ubbidienti al movimenti diversi dell' acqua, giacchè il caso qui supposto non è gran cosa diverso da quello delle aste, che impiego per la misura delle velocità de' fiumi.

97. Per altro la sperienza in questa materia vale anche più della teoria. Una sperienza molto ovvia sarebbe quella di gettare un qualunque galleggiante con una qualunque velocità, e direzione orizzontale in un' acqua stagnante. Si vedrà, che questo ben presto si riduce alla quiete. Argomento certo, che mettendo quello stesso galleggiante in un' acqua, che corra con qualunque velocità, quello pure con prestezza concepirà la velocità dell' acqua, come si può sperimentare in qualunque fiume. Ma eccomi all' accennato sperimento fatto colle aste medesime. Nel Po grande presso Ferrara entrato in una piccola nave ho abbandonato all' acqua due aste cilindriche di legno lunghe ognuna piedi 12 ½ armate a un estremo di tanto piombo, che sono rimaste fuori dell' acqua con una porzione di un piede e mezzo circa, e dopo alcuni bilanciamenti l' una precedeva all' altra con una distanza di circa dieci piedi, ed ambe viaggiavano con moto equabile, e parallele a se stesse mentre io le seguita-

va

va in nave. Dopo qualche tempo con un legno biforcato applicato colle due branche verso il punto di mezzo della parte immersa dell' asta d' avanti la ho spinta con forza accelerandone la sua velocità proccurando di non alterare la sua positura, con che io la ho discostata di più dall'altra. Cessando indi di spingerla sono stato attento per vedere se in appresso continuava a discostarsi di più dall' altra a cagione dell' impeto da me impressole, il quale è certo, che non dovett' essere smorzato dall' acqua meno veloce in un istante. Ma per quanto io, ed altri, ch' erano con me, ci impiegassimo di attenzione, non potemmo accorgerci di un maggior allontanamento, che fosse discernibile all' occhio. Indizio manifesto, che l' asta da me posta in un moto sensibilmente maggiore di quello, che avea prima, ritornò alla velocità di prima quasi subito, o sia in un tempo molto breve. Lo stesso tentai coll' altr' asta più indietro spingendola contro il corso dell' acqua col mio legno biforcato. Anche questa, dopo che da me fu abbandonata, ricuperò la velocità dell' altra così presto, che la sua distanza dall' altra, cessata la mia pressione, non si fece maggiore, come avrebbe dovuto succedere se nel ricuperare la velocità primiera, e dell' altr' asta, avesse impiegato un tempo notabile. Desidero, che altri tentino lo stesso sperimento, ch' io giudico attissimo per far concludere,

che le aste da me proposte devono essere di tutta quella puntualità in secondare i moti dell' acqua, che richiedesi per l' uso di esse da me proposto.

98. Dirò ora qualche cosa intorno al modo di preparare le aste. Se l' asta di legno destinata per lo sperimento sarà di poca lunghezza, per trovare quanto metallo vi si debba unire, acciocchè messa nell' acqua sporga sopra la superficie un piede o due, ciò si potrà ottenere facilmente mettendo l' asta nell' acqua di un qualche pozzo, ed attaccandovi all' estremo inferiore ora più, ed ora meno di metallo, finchè si veda, che l' asta abbandonata all' acqua si metta in una positura verticale rimanendo fuori dell' acqua quel piede o due, che si vorrà. Egli è però d' avvertire, che quell' asta di legno deve prima essere stata tenuta per qualche tempo sott' acqua acciocchè il legno s' imbeva di quella quantità di acqua, che può assorbire, particolarmente se il legno sarà secco, e poroso. Altrimenti si potrebbe dare, che nel principio dello sperimento l' asta sporgesse fuori dell' acqua per esempio un piede, e che nel fine non ne sporgesse fuori che un mezzo piede per essersi imbevuta alquanto di acqua nell' atto dello sperimento, e divenuta così alquanto più pesante.

99. Ma se l' asta sarà così lunga, onde non si abbia un pozzo con tant' acqua, che

sia

sia sufficiente pel sopra descritto esame, si potrà fare uso di un' acqua qualunque stagnante di qualche vasca, o buca *ABC* (Fig. 16.) nella seguente maniera. L' asta sia da comporsi di due pezzi, cioè di uno *DE* di quattro in cinque piedi da unirsi all' altro *GH* con viti, o in altra maniera. Al pezzo *DE* si unisca tanto metallo in *F*, onde posto nell' acqua o di un pozzo, o della buca stessa *ABC*, resti fuori dell' acqua con quella lunghezza *DN*, che si vorrà. Si trovi il centro di gravità dell' altro pezzo *GH*, o sia quel punto *K*, dal quale sospeso rimanga in equilibrio. Vi si attacchi uno spago *IOL*, e si metta sull' acqua *AC*, ed al punto *O* dello spago nella verticale *KO* si attacchi tanto metallo, che appena basti per fare, che il pezzo *GH* si sommerga tutto. Il metallo in *O* con l' altro in *F* sarà la quantità di metallo da unirsi all' asta composta dei due pezzi *GH*, *DE*, onde questa così messa nell' acqua possa galleggiare con una porzione *DN* fuori dell' acqua, com' è manifesto. Non mancheranno altri metodi per trovare lo stesso, e forse più comodi secondo le circostanze. A me basta di averne indicato uno.

Fig. 16.

100. Trovata la quantità del metallo da unirsi all' asta saremo in libertà di attaccare lo stesso mettallo a un estremo dell' asta dopo di averlo conformato in un cilindro del diametro dell' asta, o pure di unirlo all' asta incastran-

dovelo diſtribuito come ſi crederà più opportuno, purchè col legno venga a formare un cilindro ſolo. E qui avvertirò, che giuſta l' equazione *B* del n. 66. la *Bq* (Fig. 15.) è in ragione inverſa della *e*, o ſia della diſtanza del centro di gravità *D* dell' aſta dal punto *F* di mezzo della parte ſommerſa *CB*. E perchè ſi può ſempre unire il detto metallo all' aſta diſtribuito in modo, che il centro di gravità *D* reſti più o meno lontano da *F*, ſi vede che ſarà in noſtra mano il fare, che l'angolo *BCq* d' inclinazione dell' aſta ſia per riuſcire maggiore o minore, giacchè quanto più *D* ſarà vicino ad *F* il detto angolo ſarà maggiore.

101. Allorchè ſi avrà ſcielto quel tratto di fiume per lo ſperimento, che ſia il più regolare, e lungo circa 200 teſe, o più, ſecondo che ſi crederà meglio, per ſapere la lunghezza da darſi alle aſte, che ſi vorranno impiegare, converrà fare almeno tre ſezioni di quel tratto, una nel mezzo, ed una per ogni eſtremo. Una di queſte ſia *ABC* (Fig. 17), colla quale ſi conoſcerà la lunghezza *FG* da darſi a un di preſſo all' aſta, che dovrà viaggiare nel filone, e le lunghezze *HI*, *DE* da darſi alle laterali: e lo ſteſſo ſi dica pel caſo, in cui ſe ne voglia impiegare più di tre; giacchè quante più ſe ne impiegheranno, il rilievo ſarà più preciſo; e nel Po grande, aſſai largo, tre ſarebbero ſicuramente poche. Poi sarà bene

il

il fare degli scandagli frequenti lungo il viaggio da farsi da ciascuna asta per rilevare se per avventura la lunghezza delle aste scielta colla sola ispezione delle tre sezioni fosse per qualcuna di troppo a motivo di un qualche dosso, che s' incontrasse in quel cammino.

102. Nel Po grande si può seguitare ogni asta con una nave, con che si potrà osservare con qualche precisione l' angolo d' inclinazione dell' asta per sapere prossimamente la scala delle velocità. E lo stesso si dica di tutti i fiumi navigabili almeno a seconda del loro corso anche in tempo di piena. E così si potranno ricuperare le aste per un altro sperimento. Il tempo, che ogni asta impiegherà nel correre la lunghezza stabilita, dovrà misurarsi o con un orologio a secondi, o con un pendolo a secondi. Nei torrenti converrà contentarsi di osservare l' angolo di ogni asta all' ingrosso (90) stando sulla ripa, al più con l' occhio armato. Ed in questi per ricuperare le aste converrà accorrere alle curvature del fiume inferiormente al sito dello sperimento, dove il filone si accosta alla ripa, e si sa, che i galleggianti finalmente vanno al filone. Nel resto mi rimetto all' avvedutezza, industria, e sagacità di quelli, che si accignessero ad esperimenti di questa fatta, che sono dell' ultima importanza per promuovere una scienza, dalla quale può dipendere la felicità, o l' esterminio

di paesi intieri, e che perciò merita d'essere protetta con impegno da più Sovrani.

Calcolo accennato al n. 78.

$l.\, m = l\ 21\tfrac{7}{9} = 1.3380136$

$l.\, \sqrt{512}\ .\ . = 1.3546350$

$= 2.6920486$

$l.\, \sqrt{1000}\ .\ . = 1.5000000$

$l.\, q = l.\, m\sqrt{\frac{512}{1000}} = 1.1926486$

$l.\, n = l.\, 9\tfrac{7}{9} = 0.9902402$

$l.\, 16\ .\ .\ .\ . = 1.2041200$

$l.\, q^2\ .\ .\ .\ . = 2.3852972$

$l.\, \sqrt[3]{q}\ .\ .\ .\ . = 0.3975495$

$l.\, 35\ .\ .\ .\ . = 1.5440680$

$l.\, \frac{16q^2\sqrt[3]{q}}{35}\ . = 2.4428987$ n. 277,267

$l.\, 3\ .\ .\ .\ . = 0.4771212$

$l.\, m^2\ .\ .\ . = 2.6760272$

$l.\, \sqrt[3]{m}\ .\ .\ . = 0.4460045$

3.5991529

$l.\, 7\ .\ .\ .\ . = 0.8450980$

$l.\, \tfrac{3}{7}.\, m^2\sqrt[3]{m} = 2.7540549$ n. 567,516

l. 3

$l.\,3 \ldots\ldots = 0.4771212$
$l.\,n^2 \ldots\ldots = 1.9804804$
$l.\sqrt[3]{n} \ldots\ldots = 0.3300801$

$l.\,\frac{2}{7}\,n^2\sqrt[3]{n} \;.= 1.9425837$ n. 87,616

$l.\,6 \ldots\ldots = 0.7781512$
$l.\sqrt[3]{q^2} \ldots = 0.7950991$

1.5732503
$l.\,5 \ldots\ldots = 0.6989700$

$l.\,\frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2} \ldots = 0.8742803$
$l.\,m \ldots\ldots = 1.3380136$
$l.\sqrt[3]{m^2} \ldots = 0.8920091$

$l.\frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2}.m\sqrt[3]{m^2} = 3.1043030$ n. 1271,461

$l.\,\frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2} \ldots = 0.8742803$
$l.\,n \ldots\ldots = 0.9902402$
$l.\sqrt[3]{n^2} \ldots = 0.6601601$

$l.\frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2}.n\sqrt[3]{n^2} = 2.5246806$ n. 334,719

$l.\,q \ldots\ldots = 1.1926486$
$l.\sqrt[3]{q} \ldots = 0.3975493$
$l.\,(m+n) =$
$l.(21\frac{7}{9}+9\frac{7}{9}) = 1.4990758$

Nn 4 $l.\,q$

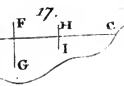
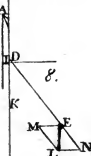
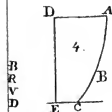
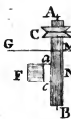
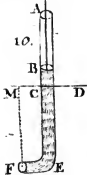
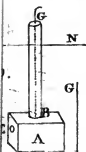
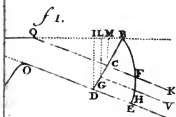
$l.q\sqrt[3]{q}.(m+n) = 3.0892739$ n. 1228,213

fomm. 1883,447 1883,445
1883,445

0,002

Onde $\frac{16q^2\sqrt[3]{q}}{35} - \frac{3}{7}(m^2\sqrt[3]{m} + n^2\sqrt[3]{n}) + \frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2}(m\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{n^2}) - q\sqrt[3]{q}(m + n) = 0.002$.

Fine del Saggio del Sig. Bonati.

emoria del Sig. Bonati
f 1.
4.
5.
8.
10.
14.
17.

APPENDICE

DEL R. PROFESSORE

P. D. GREGORIO FONTANA

APPENDICE

DEL R. PROFESSORE

P. D. GREGORIO FONTANA

ARTICOLO I.

Principj di Teoria dei Mulini a Vento.

§. 1. Una delle più belle ed ingegnose applicazioni, che della Teoria intorno alla percoſſa de' fluidi ſia mai ſtata fatta alle macchine meſſe in moto dall' urto de' medeſimi, è indubitatamente quella che riguarda i Mulini a vento, i quali introdotti con inſigne vantaggio in molte provincie di Europa sono in oggi divenuti argomento fecondo non meno di aſtruse ricerche pel Geometra, che di laborioso esercizio e d'induſtria pel Meccanico pratico. Il meccanismo e l'azione di queſte macchine artifiziose ſino dal principio di queſto secolo furono aſſoggettati all' analiſi, colla scorta della quale ſi giunse a fiſſare la ſituazione più vantaggiosa, che aver debbono le Ali del Mulino per riguardo all' angolo da eſſe formato coll' aſſe della macchina, affinchè queſta poſſa produrre il maſſimo

mo effetto possibile. Ma in questa determinazione della più vantaggiosa inclinazione dell' Ali all' asse del Mulino non si ebbe riguardo se non unicamente al principio del moto, e si considerarono le Ale in quiete nel momento che ricevono la spinta e l' azione del vento. A questo solo caso si limitarono per lungo tratto di tempo le indagini de' Geometri, e lasciarono totalmente in dimenticanza l' altro caso di gran lunga più importante e più complicato, quando cioè il vento, siccome sempre accade dopo il primo istante del moto, seguita a batter nell' Ala già posta in attual movimento, la quale con ciò si sottrae in parte all' azione del vento impellente. Il primo ad accorgersi dell'aspetto essenzialmente diverso, che in questo secondo caso il Problema acquistava, sembra essere stato Daniello BERNOULLI nella sua *Idrodinamica* Sez. IX. §. 39. 40. Attribuiscono altri questa gloria a MACLAURIN, il quale nel suo *Trattato delle Flussioni* §. 911. maneggia colla sua solita desterità un siffatto Problema, e ne distingue con accuratezza i due casi. Ma oltre l' essere l' opera di BERNOULLI anteriore di quattro anni a quella di MACLAURIN, e il potersi altronde provare, che questi ha veduta e consultata l' opera di quello, la strada tenuta dal Geometra di Edimburgo è tanto simile a quella del Geometra di Basilea, che la soluzione del primo sembra essere intera-

ra-

ramente tratta dalla Bernoulliana. Dopo il lavoro di questi Geometri, e un breve tocco magistrale dato dal D' ALEMBERT sopra lo stesso argomento nel suo *Trattato dell' Equilibrio e Moto de' Fluidi* §. 368. venne l' EULERO in diverse imprese con tutte le forze dell' Analisi ad affrontare il Problema, e nel tomo quarto de' *Nuovi Commentarj dell' Accademia di Pietroburgo*, come pure nell' ottavo, e nel duodecimo delle *Memorie dell' Accademia di Berlino* diede l' ultimo compimento alla quistione, e consumò l' impresa. Dietro i passi di questi celebri uomini io verrò qui succintamente esponendo ciò che vi ha di più interessante in un sì utile e curioso argomento.

2. Sia *NEOP* (Fig. 1. Tav. dell'App.) un piano diviso in due parti simili ed uguali dalla retta *CM*, la quale perciò passerà pel centro *H* di gravità del piano, e formerà colla base *NE* angoli retti *MCN*, *MCE*. Adattato questo piano immobilmente ad un albero, che si aggira intorno al suo asse *AC* perpendicolare a *CM*, viene portato in giro esso pure dall' albero intorno ad *AC*, restando intanto inalterabile per tutto un tal giro l' angolo *ACE*, che si può fissare ad arbitrio. In questo stato di cose il detto piano *NO* acquista il nome di *Ala del Mulino a Vento*.

Fig. 1. Tav. dell' App.

3. Ora poichè *CE* nel piano dell' Ala, e *CA* nel piano *ACM* sono entrambe perpendicolari

colari

colari alla comune sezione CM dei due piani, sarà l'angolo ACE l'inclinazione dei medesimi, ed il piano ACE di quest'angolo sarà conseguentemente normale all'uno e all'altro di detti piani; e quindi qualsivoglia perpendicolo guidato dalla retta AC sopra l'Ala cascherà sulla retta CE, e così l'angolo ACE sarà anco la misura dell'inclinazione dell'asse AC all'Ala.

Sia quest'angolo $ACE = \varphi$. Rivolgendosi l'Ala NO nel modo indicato intorno all'asse AC qualsivoglia punto di lei P fuori della CM descrive la circonferenza della base di un cono retto, che ha CP per lato, ed il prolungamento di AC per suo asse, oppure (ciò che torna allo stesso) ogni punto P descrive la periferia d'un cerchio, che ha C per polo, ed è incontrato perpendicolarmente nel centro da AC prodotta.

4. Condotta da A la normale AE sull' Ala, e posto $AC = b$, diventa $AE = b$ sen. φ, $CE = b$ cos. φ; e per esser dato il punto P, sono pur dati CP, e l'angolo PCE; e perciò nel triangolo PEC è parimente dato EP: dunque sarà anche dato $AP = \sqrt{(EP^2 + b^2 \text{ sen. } \varphi^2)}$. Dal che è manifesto, che essendo dati tutti i lati del triangolo PCA, si renderà noto l'angolo PCA, il quale rimane sempre lo stesso nel rivolgersi dell' Ala intorno all' asse CA, qualora l'Ala, e il piano dell' angolo invariabile ACE nel rotarsi insieme in-

intorno a *CA* persistono ad essere l'una all'altro perpendicolari.

5. Posto l'asse *AC* in direzione del vento, tutte le particelle dell'aria, che in direzioni parallele ad *AC* vanno a colpire l'Ala del Mulino, agiscono sopra di essa, come agirebbe la forza della gravità, giacchè ci possiamo rappresentare anche l'azione della forza di gravità mediante tanti colpi fatti in direzioni parallele. Da questi colpi tutti paralleli, e tutti di eguale energia, che imprime la gravità a tutte le particelle eguali de' corpi, risulta ne' corpi stessi quel punto, in cui tali colpi ponno concepirsi tutti riuniti, e che si nomina *centro di gravità*. Quindi è, che attesa questa somiglianza di agire della gravità, e delle particelle dell'aria per rispetto all'Ala del Mulino potremo immaginarci l'intera forza del vento contro l'Ala come raccolta e riunita nel centro di gravità *H* di lei, per modo che o l'Ala sia spinta in tutta la sua estensione dalle particelle dell'aria in direzioni parallele, o sia colpito il solo punto *H* dalle stesse particelle riunite in quella direzione, l'effetto sia il medesimo in ordine al moto giratorio da imprimersi all'Ala.

6. Stabiliti questi principj, sia (*Fig.* 2.) *LHhl* un rettangolo $= B$, e prendansi $HG = hg$ perpendicolari al piano del rettangolo. Contro un tal piano muovasi l'aria in tal mo-

Fig. 2

do,

do, che ogni sua particella in un dato tempo, per es. di un secondo corra equabilmente lo spazio $GH = c$; e venendo colpito il piano nel principio di un secondo dalla particella aerea, che trovasi in H, venga esso colpito alla fine del secondo da quella che era in G, e così nella durata di un secondo tante sieno le molecole aeree percuotenti, quante capiscono nell'intervallo $HG = c$, tutte mosse colla stessa velocità.

7. Che se la stessa aria si muove più rapidamente, e scorre in un secondo lo spazio $m.c$, allora le particelle percuotenti sono m volte più di prima, e ciascuna di esse dà un colpo m volte più forte che dianzi, poichè a masse eguali la forza dell'urto è proporzionale alla velocità: ond'è, che avuto riguardo al numero delle particelle urtanti, e alla velocità di ciascuna nasce l'urto totale contro il piano m^2 volte più gagliardo di prima; che è quanto dire, gli urti perpendicolari, in parità di tutto il restante, stanno fra loro come i quadrati delle velocità; e in conseguenza se si prende $B.c^2$ per rappresentare l'urto fatto contro il piano proposto colla velocità c, quello che vien fatto con un'altra velocità C verrà espresso da $B.C^2$, essendo così entrambi in ragione dupplicata delle velocità.

8. Formino ora GH, gh col piano Hl un angolo $= \omega$, e seguiti l'aria a scorrere in un secon-

secondo lo spazio $GH = c$: in questo supposto ogni particella aerea viene a battere nel piano sotto l' angolo ω; e però la sua azione può risolversi in due, una perpendicolare al piano, l' altra ad esso parallela. Quest' ultima non fa alcuna impressione sul piano; e la prima sta all' urto, che farebbe perpendicolarmente la particella colla sua velocità c, come sta sen. $\omega : 1$.

Presentemente hassi un prisma, la cui base è $= B$, ed i cui lati sono inclinati alla base sotto l' angolo ω; ond' è manifestamente l' altezza del prisma $= c$ sen. ω, e la sua capacità $= B.c$sen. ω: e per conseguenza tante particelle aeree, quante sono contenute in questa capacità, giungono in un secondo a battere contro il piano, ciascuna con un urto $= c$ sen. ω. Laonde l'urto totale di tutte le particelle contenute nel prisma viene ad essere $B . c$ sen. $\omega \times c$ sen. $\omega = B.c^2$sen. ω^2; il che dà a divedere, che gli urti obliqui del fluido contro un piano sono in ragione composta della duplicata delle velocità, e della duplicata de'seni degli angoli d' incidenza formati dalla direzione dell' urto col piano: e però se lo stesso fluido colpisse il dato piano colla velocità C sotto l' angolo λ, il suo urto sarebbe $B.C^2$sen. λ^2.

Qui tacitamente abbiamo supposto, che ogni particella del fluido agisca contro il pia-

no in quel solo momento, in cui lo colpisce; e che passato quell' istante non eserciti più alcuna azione nè sul piano, nè sulle altre particelle; il che non potendo rigorosamente esser vero non è meraviglia, se le sperienze finora fatte non hanno punto confermata, almeno in tutti i casi, quella parte della legge degli urti obliqui, la quale riguarda la proporzione col quadrato del seno d' incidenza. Ma pure in mancanza di meglio si adotta quest' ipotesi provisionalmente fino a che siasi stabilito qualche cosa di più sicuro in questa intralciatissima materia.

Venghiamo ora al

PROBLEMA I.

9. *Sotto le premesse condizioni determinare la forza del vento, impiegata precisamente a mettere in moto l' Ala del Mulino.*

SOLUZIONE.

Immaginiamo, che il vento si muova (*Fig.* I.) nella direzione GH, e la moltitudine delle molecole aeree, che in un dato tempo, per es. di un secondo, percuotono contro l' Ala, sia come un prisma pieno d' aria, la cui base è il piano dell' Ala, e le cui faccie laterali si intersecano in rette parallele a GH; ed inoltre la forza, con cui questo prisma

Fig. 1.

aereo

aereo investe l'Ala, si concepisca ridotta alla *risultante* GH e diretta contro il solo centro di gravità H.

Essendo HG parallela all'asse CA, forma ella coll'Ala un angolo $= \phi$, e trovasi nel piano ACH; e condotta la normale HI al piano dell'Ala nasce l'angolo $GHI = 90^\circ - \phi$; onde se si tira la perpendicolare GI sulla retta HI, risulta $GI = HG \cdot \cos.\ \phi$, $HI = HG \cdot \text{sen.}\ \phi$, ovvero $\frac{GI}{HG} = \cos.\ \phi$, $\frac{HI}{HG} = \text{sen.}\ \phi$.

Prendasi la superficie dell'Ala $= a^2$; il vento, che vi batte contro, scorra equabilmente in un secondo lo spazio $= c$; e s'immagini un prisma, che ha l'Ala per base, e i cui lati paralleli a GH formano colla base un angolo $= \phi$, e sono ciascuno $= c$. Un perpendicolo che dall'estremità di un lato di questo prisma casca sulla base, ed è $= c$ sen. ϕ, dà l'altezza del prisma, la cui capacità è in conseguenza $= a^2 c$ sen. ϕ; e però tanti atomi aerei, quanti ne cape un tal prisma, urtano l'Ala nella durata di un secondo. Questa massa d'aria concepiscasi condensata e riunita nella sola linea GH, che va a ferir l'Ala nel centro H di gravità, a cui si riduce la *risultante* di tutte le impressioni fatte da tutti i corpuscoli aerei impellenti.

Ora questa spinta secondo GH esercitata da ciascheduna molecola del prisma aereo risol-

vafi in due altre, una parallela a GI, l'altra parallela ad IH, delle quali la prima, come parallela al piano dell' Ala, non produce alcun effetto su di essa; la seconda investe l' Ala perpendicolarmente, ed è $= \frac{HI}{CH} \cdot c = c \text{ sen.} \varphi$, la quale moltiplicata pel numero delle molecole impellenti, cioè per $a^2 c \text{ sen.} \varphi$ dà $a^2 c^2 \text{ sen.} \varphi^2$ per l'impulso perpendicolare di tutta la massa aerea del prisma contro l' Ala.

Ora l' Ala in tal modo dal vento battuta non può concepire altro moto fuorchè rivolgendosi intorno all' asse AC, sicchè la retta CH perpendicolare ad AC descrive un cerchio che ha C per centro. E poichè mentre CH descrive un tal cerchio, il piano ACH a lui perpendicolare si aggira intorno ad AC, fa d'uopo risolvere la predetta spinta secondo IH nelle due IL, ed LH, quella normale al piano ACH, questa situata nel piano medesimo. Questa spinta secondo LH tende a muovere in tal direzione il punto H, il qual moto se effettivamente accadesse, dovrebbe o cangiarsi la posizione di CH rispetto a CA, o muoversi anche AC a seconda di H; ed al primo si oppone la fermezza dell' Ala sull' asse, al secondo l'immobilità dell' asse: conseguentemente la forza secondo LH resta interamente distrutta dalla stabilità e saldezza della macchina.

Rimane dunque per ultimo il solo impul-

so secondo *IL*, il quale come normale al piano *ACH*, e tangente del cerchio descritto dalla *CH* ha il pieno suo effetto in muover l' Ala in giro nel modo spiegato.

E poichè *IH* è perpendicolare al piano dell' Ala, ed *IL* al piano *ACH*, sarà il piano *HIL* normale ai detti due piani, de' quali la comune sezione *CH* sarà perciò normale allo stesso piano *HIL*, e quindi anche normale alla comune sezione del piano *HIL* e dell' Ala. Ma nel piano *ACH* la retta *HL* è normale a *CH*, come è noto dalle proprietà de' piani: dunque forma *HL* colla comune sezione del piano *HIL* e dell' Ala un angolo $= \varphi$, che misura l' inclinazione del piano *ACH* al piano dell' Ala; e da ciò si deduce, che l' angolo fatto da *HI* con *HL* è il complemento di φ. Laonde sarà $1 : \cos. \varphi :: HI : IL ::$ Forza secondo *HI*: Forza secondo $IL :: a^2c^2$ sen. φ^2 : Forza secondo *IL*. Dunque finalmente la forza o l' impulso secondo *IL*, che di tutta l' azione del vento è la sola parte utilmente impiegata a produrre la rotazione dell' Ala, essendo tutto il restante di tal azione inoperoso per quest' effetto, ha per espressione la formola a^2c^2 sen. φ^2 cos. φ. Il che era ec.

PROBLEMA II.

10. *Determinare nel Mulino a Vento la più vantaggiosa situazione dell' Ale rispetto all' asse, e*

 ciò

ciò che è lo ſteſſo ritrovare sotto qual poſizione dell' Ale l'azione del vento per volgerle in giro ſia la maſſima .

SOLUZIONE.

L'azione, che il vento esercita unicamente a muovere in giro l'Ala del Mulino, ſi è trovata $= a^2c^2$ sen. φ^2 cos. φ; e dovendo queſta eſſere *un maſſimo*, il suo differenziale sarà zero. Perlocchè ſi avrà l'equazione a^2c^2 ($2d\varphi$ sen. φ cos. φ^2 — $d\varphi$ sen. φ^3) $=$ o, la quale divisa per $a^2c^2d\varphi$ sen. φ ſi cangia in queſt' altra 2 cos. φ^2 — sen. $\varphi^2 =$ o, vale a dire 2 — 3 sen. $\varphi^2 =$ o, da cui ſi ritrae subito sen. $\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$, ed in fine $\varphi = 54^\circ.\ 44'$. Dunque la ſituazione più vantaggiosa dell' Ale ne' Mulini a vento ſi ha allorchè il piano dell' Ala forma coll' aſſe dell' albero del Mulino un angolo di $54^\circ.\ 44'$. Il che era ec.

11. In queſto Problema abbiamo suppoſto, che l'Ala del Mulino ſi trovaſſe nello ſtato di quiete allorchè veniva percoſſa dal vento; e queſta ipoteſi, la quale suole unicamente contemplarſi dagli Scrittori Idraulici ad eccezione di alcuni pochi, ci ha dato un risultato aſſai semplice. Che se ſi conſidera l'Ala già in moto attuale, ed urtata in tale ſtato dal vento, ſiccome realmente accade, il Problema diviene allora molto più complicato e difficile, e

e ad esso conviene farsi strada colle seguenti considerazioni.

Nell' Ala *THRQV* (*Fig.* 3.) prendasi una sezione indeterminata *EF* perpendicolare all' asse *RS* dell' Ala, dal quale è divisa per mezzo in *P*. Contro detta sezione o retta *EF* (*Fig.* 4) vada a percuotere il vento nella direzione *AP*, ovvero *PH*, e con una velocità rappresentata dalla stessa *PH* in tanto che l' Ala si volge con un moto conico intorno all' asse del Mulino. Si rappresenti la velocità del punto *P* dell' Ala colla retta *PC*, la quale, nel presente supposto che *PH* sia parallela all' asse della rotazione, dee manifestamente essere perpendicolare a *PH*. Risolvo la velocità *PH* del vento nella velocità *PC* uguale a quella dell' Ala, e nell' altra *PI*, che nasce compiendo il parallelogrammo *PCHI*: ed è evidente, che colla velocità *PC* il vento non agisce punto sull' Ala, ossia sul punto *P*, perchè con egual velocità questo punto se ne sottrae; e però resta la sola velocità *PI*, colla quale il vento agisce contro il punto *P* della sezione *EF* come se questa fosse assolutamente in quiete.

Fig. 3.

Fig. 4.

È poi altronde noto, che lo sforzo esercitato dal vento contro il punto *P* della retta *EF* immobile colla velocità *PI* viene rappresentato da $PI^2 . (\text{sen.}\, IPE)^2$. E siccome questo sforzo viene sempre esercitato in una direzione perpendicolare ad *EF*, prendasi perciò

la perpendicolare PG per rappresentarlo; e si faccia della forza PG una nuova risoluzione nelle due forze PD, PL, quella in direzione del moto del punto P, questa in direzione perpendicolare a PD. Di queste due forze la seconda PL, come perpendicolare alla direzione del moto dell' Ala, non ha alcuna efficacia a secondare, o impedire un tal moto; ma la prima PD a seconda del moto medesimo è tutta impiegata utilmente a quest' effetto. Perlocchè quella parte dell' impulso del vento contro il punto P, che è diretta a far girar l' Ala intorno all' asse del Mulino, viene espressa da $PD = PG . \text{sen.}\, PGD = PG . \text{sen.}\, FPD = PG \cos.\, APF = PI^2 . \cos.\, APF . (\text{sen.}\, IPE)^2$. Menisi ora a PC la perpendicolare CN, la quale incontri in O la EF, ed in N la IP prolungata: e sarà $PI = PN$, ed $IPE = NPO$, e quindi $PD = PN^2 . \cos.\, APF . (\text{sen.}\, NPO)^2$. Ma nel triangolo PNO si ha $PN : NO :: \text{sen.}\, PON : \text{sen.}\, NPO :: \text{sen.}\, POC : \text{sen.}\, NPO :: \text{sen.}\, APF : \text{sen.}\, NPO$; e però $PN^2 . (\text{sen.}\, NPO)^2 = NO^2 . (\text{sen.}\, APF)^2$. Dunque $PD = NO^2 \times \cos.\, APF . (\text{sen.}\, APF)^2$. In oltre $CO = \frac{PC}{\text{tang.}\, POC} = \frac{PC}{\text{tang.}\, APF}$, ed $NO = NC - CO = PH - \frac{PC}{\text{tang.}\, APF} = \frac{PH . \text{sen.}\, APF - PC . \cos.\, APF}{\text{sen.}\, APF}$; quindi sostituito

to questo valore in quello di PD, nasce $PD = \cos. APF(PH.\text{sen.} APF - PC.\cos. APF)^2$. Sicchè posta la velocità PH del vento $= c$, la velocità PC del punto P dell' Ala $= v$, l' angolo d' incidenza $APF = \varphi$, risulta lo sforzo PD diretto a far girar l' Ala $= \cos. \varphi \times (c \text{ sen. } \varphi - v \cos. \varphi)^2$. E se si prende (*Fig. 3.*) l' Asse RS dell' Ala $= a$, la velocità nell' estremo $S = u$, ed $RP = x$, nasce $v = \frac{ux}{a}$, e perciò l' impulso contro il punto $P = \cos. \varphi \left(c \text{ sen. } \varphi - \frac{ux \cos. \varphi}{a} \right)^2$. Fig. 3.

Laonde se si guida la ef parallela ed infinitamente vicina alla EF, e si fa $EF = y$, onde abbiasi l' elemento $EefF$ dell' Ala $= ydx$, e se in oltre si suppone, che la larghezza dell' Ala, come ordinariamente suol essere, sia picciolissima in confronto della sua lunghezza, sicchè tutti i punti dell' elemento $EefF$ possano senza error sensibile immaginarsi dotati della medesima velocità, risulterà l' impulso contro il detto elemento $=$

$$ydx \cos. \varphi \left(c \text{ sen. } \varphi - \frac{ux \cos. \varphi}{a} \right)^2,$$ e questo moltiplicato per la velocità $\frac{ux}{a}$ comune a tutto l' elemento dà il *momento* di tale impulso $=$

$uyxdx$

$\frac{uyxdx \cos.\varphi}{a} \left(c \text{ sen. } \varphi - \frac{ux \cos.\varphi}{a} \right)^2$. Dunque integrando sarà il momento dell'impulso contro la porzione indefinita $HEFQ$ dell' Ala $= \int \frac{uyxdx \cos.\varphi}{a} \left(c^2 \text{ sen. } \varphi^2 - \frac{2cux \text{ sen. } \varphi \cos.\varphi}{a} + \frac{u^2x^2 \cos.\varphi^2}{a^2} \right) +$ Coſt.; cioè (suppoſta $y = b$, oſſia l'Ala rettangolare) $= \frac{bu \cos.\varphi}{a} \times \left(\frac{c^2x^2 \text{ sen. } \varphi^2}{2} - \frac{2cux^3 \text{ sen. } \varphi \cos.\varphi}{3a} + \frac{u^2x^4 \cos.\varphi^2}{4a^2} \right)$ + Coſt. Ora un tal momento debb'eſſer nullo allorchè $x = RN = h$; conſeguentemente naſce Coſt. $= - \frac{bu \cos.\varphi}{a} \left(\frac{c^2h^2 \text{ sen. } \varphi^2}{2} - \frac{2cuh^3 \text{ sen. } \varphi \cos.\varphi}{3a} + \frac{u^2h^4 \cos.\varphi^2}{4a^2} \right)$; dal che ſi deduce il momento dell'impulso contro $HEFQ$ $= \frac{bu \cos.\varphi}{a} \left(\frac{c^2 \text{ sen. } \varphi^2}{2} (x^2 - h^2) - \frac{2cu \text{ sen. } \varphi \cos.\varphi}{3a} (x^3 - h^3) + \frac{u^2 \cos\varphi^2}{4a^2} (x^4 - h^4) \right)$.
Finalmente pigliando $x = a$, e traſcurando h, che in paragone di a ſi fa ſempre ne' Mulini ordinarj piccioliſſima, riſulta il momento d'impulſo di tutta l'Ala $HTVQ = abu \cos.\varphi \left(\frac{c^2 \text{ sen. } \varphi^2}{2} \right.$ —

$- \frac{2}{3} cu \text{ sen. } \varphi \cos. \varphi + \frac{1}{4} u^2 \cos. \varphi^2 \Big).$

PROBLEMA III.

12. *Determinare la costruzione d'un Mulino a vento, il quale produca il* massimo *effetto possibile.*

SOLUZIONE.

Se si suppone, che il Mulino porti n Ale, il suo effetto sarà evidentemente $nabu \cos. \varphi \times \left(\frac{c^2 \text{ sen. } \varphi^2}{2} - \frac{2}{3} cu \text{ sen. } \varphi \cos. \varphi + \frac{1}{4} u^2 \cos. \varphi^2 \right)$ $= nabc^2 u \cos. \varphi \text{ sen. } \varphi^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2u \cos. \varphi}{3c \text{ sen. } \varphi} + \frac{u^2 \cos. \varphi^2}{4c^2 \text{sen.} \varphi^2} \right)$, e fatto $\frac{u \cos. \varphi}{c \text{ sen. } \varphi} = y$, l' effetto della macchina verrà espressa dalla formola $nabc^3 y \text{ sen. } \varphi^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} y + \frac{1}{4} y^2 \right)$, il cui differenziale preso nell' ipotesi di y variabile, ed uguagliato a zero dà l' equazione $\frac{1}{2} - \frac{4}{3} y + \frac{3}{4} y^2 = 0$, dalla quale si ottiene $y = \frac{8 \pm \sqrt{10}}{9}$. Di questi due valori di y il solo secondo $y = \frac{8 - \sqrt{10}}{9}$ è quello che dà alla predetta formola il *massimo* aumento, giacchè il secondo differenziale della formola mediante la sostituzione di quel valore apparisce negativo. Sostituito poi

poi il valore trovato di y, la misura dell'effetto massimo del Mulino diviene $\left(\frac{68 + 5\sqrt{10}}{729}\right) \times nabc^3$ sen. φ^3. Per la velocità u corrispondente all'effetto massimo trovasi $u = cy$ tang. $\varphi = \left(\frac{8 - \sqrt{10}}{9}\right) c$ tang. $\varphi = 0,5375\, c$ tang. φ.

Che se si prende l'angolo $\varphi = 54°.44'$, come nel II. Problema, allora risultando tang. $\varphi = \sqrt{2}$, nasce $u = 0,5375\, c\sqrt{2} = 0,76\, c$ vale a dire la velocità del punto estremo dell'Ala sarà un poco maggiore di sette decime della velocità del vento.

LEMMA.

13. *Se l'integrale d'una funzione di due variabili moltiplicata pel differenziale d'una di esse è un* massimo, *sarà zero la quantità, che nel differenziale di detta funzione moltiplica il differenziale dell'altra variabile.*

DIMOSTRAZIONE.

Chiamata Z la funzione delle due variabili x, φ, e supposto, che l'integrale $\int Zdx$ sia un *massimo*, la Teoria de' Massimi e Minimi delle formole integrali indefinite ci insegna, che anche il differenziale Zdx sarà un *massimo*, e conseguentemente *massimo* anche il valore della fun-

funzione Z. Perlocchè il differenziale di detta funzione dovrà essere zero; e quindi avrassi $dZ = Pdx + Qd\varphi = 0$. Ma per la citata Teoria il differenziale della Z dee prendersi facendo variare la sola φ, e riguardando come costante la x, perchè la variazione dell' elemento Zdx non dipende se non se dalla variazione dell' ordinata φ della curva restando invariabile l' ascissa x corrispondente. Dunque nell' equazione $Pdx + Qd\varphi = 0$ sparisce Pdx, e resta $Qd\varphi = 0$, e in conseguenza $Q = 0$. Il che era ec.

SCOLIO.

14. Qualche illustre Geometra ha creduto di poter dimostrare questo Lemma col seguente discorso: Essendo $Z =$ funz. (x, φ), e però $dZ = Pdx + Qd\varphi$, si ha integrando $Z = \int Pdx + \int Qd\varphi$; e quindi $Zdx = dx\int Pdx + dx\int Qd\varphi$; ed integrando di nuovo $\int Zdx = \int dx\int Pdx + \int dx\int Qd\varphi$. Ma per ipotesi $\int Zdx$ è un *massimo*; dunque il suo differenziale sarà zero, cioè $Zdx = dx\int Pdx + dx\int Qd\varphi = 0$, ovvero $\int Pdx$

+

$+ \int Qd\varphi = 0$, oppure differenziando, $Pdx + Qd\varphi = 0$. E ſiccome l' equazione $Zdx = 0$ dà viſibilmente $dx = 0$: perciò l' equazione $Pdx + Qd\varphi = 0$ diviene $Qd\varphi = 0$, e di qui deriva $Q = 0$.

Una tal dimoſtrazione sembra per lo meno inesatta: imperciocchè dove trattaſi di formole integrali *indefinite* non è giuſto l' inferire dall' eſſere $\int Zdx$ un maſſimo, che il suo differenziale Zdx ſia zero, dovendo anzi un tal differenziale eſſere un maſſimo eſſo pure. E quand' anco Zdx foſſe zero, non può mai dedurſi da queſto solo, che ancora dx ſia zero. Sicchè sembra peccare per due capi il ragionamento qui espoſto, a cui Geometri altronde rispettabili hanno voluto dar corso.

PROBLEMA IV.

15. *Determinare la più vantaggiosa inclinazione delle Ale all' aſſe del Mulino, oſſia quella, da cui risulti il maſſimo effetto di queſta macchina.*

SOLUZIONE.

Si è veduto, che chiamata b la picciola larghezza dell' Ala rettangolare il momento dell' impulso è $\int \frac{buxdx}{a} \left(c \text{ sen. } \varphi - \frac{ux \cos. \varphi}{a}\right)^2 \times \cos. \varphi$

cos. φ. Pongasi $\frac{bux \cos.\varphi}{a}\left(c \,\mathrm{sen.}\, \varphi - \frac{ux \cos.\varphi}{a}\right)^2$ $= Z$, e considerata u come costante sarà dZ $= \frac{budx \cos.\varphi}{a}(c \,\mathrm{sen.}\, \varphi - ux \cos.\varphi)^2 -$ $\frac{2bu^2xdx \cos.\varphi^2}{a^2}\left(c \,\mathrm{sen.}\, \varphi - \frac{ux \cos.\varphi}{a}\right) -$ $\frac{bux\,d\varphi \,\mathrm{sen.}\, \varphi}{a}\left(c \,\mathrm{sen.}\, \varphi - \frac{ux \cos.\varphi}{a}\right)^2 +$ $\frac{2bux\,d\varphi \cos.\varphi}{a}\left(c \,\mathrm{sen.}\, \varphi - \frac{ux \cos.\varphi}{a}\right) \times$ $\left(c \cos.\varphi + \frac{ux \,\mathrm{sen.}\, \varphi}{a}\right)$.

Perlocchè dovendo essere per ipotesi massimo il momento dell' impulso, ossia $\int Zdx$, ne viene pel Lemma, che nel valore di dZ la quantità, che moltiplica $d\varphi$, sarà zero; e quindi nasce $-\frac{bux\,d\varphi \,\mathrm{sen.}\, \varphi}{a}\left(c \,\mathrm{sen.}\, \varphi - \frac{ux \cos.\varphi}{a}\right)^2$ $+ \frac{2bux\,d\varphi \cos.\varphi}{a}\left(c \,\mathrm{sen.}\, \varphi - \frac{ux \cos.\varphi}{a}\right) \times$ $\left(c \cos.\varphi + \frac{ux \,\mathrm{sen.}\, \varphi}{a}\right) = 0$, e dividendo per $\frac{bux\,d\varphi}{a}\left(c \,\mathrm{sen.}\, \varphi - \frac{ux \cos.\varphi}{a}\right)$ si ottiene $-\,\mathrm{sen.}\, \varphi\left(c \,\mathrm{sen.}\, \varphi - \frac{ux \cos.\varphi}{a}\right) +$ $2 \cos.\varphi\left(c \cos.\varphi + \frac{ux \,\mathrm{sen.}\, \varphi}{a}\right) = 0$, e di

di nuovo dividendo per cos. φ^2 si raccoglie $-\,c$ tang. $\varphi^2 + \frac{ux \text{ tang. } \varphi}{a} + 2c + \frac{2ux \text{ tang. } \varphi}{a}$ $=$ o, ovvero tang. $\varphi^2 - \frac{3ux \text{ tang. } \varphi}{ca} - 2$ $=$ o, la qual equazione somministra tang. φ $= \frac{3ux}{2ac} \pm \sqrt{\left(\frac{9u^2x^2}{4a^2c^2} + 2\right)}$. Il che era ec.

16. Dal valore ritrovato tang. $\varphi = \frac{3ux}{2ac}$ $+ \sqrt{\left(\frac{9u^2x^2}{4a^2c^2} + 2\right)}$ si scorge, che ad ogni differente distanza x corrisponde un diverso angolo d'inclinazione dell'Ala all'asse del Mulino, e che quest'angolo va crescendo con x, per modo che l'Ala esser dee curva in tutta la sua lunghezza. Un tal angolo è minimo, quando $x = $ o, nascendo allora tang. $\varphi = \sqrt{2}$, cioè $\varphi = 54°.\,44'$; ed è massimo, quando $x = a$, divenendo in tal caso tang. $\varphi =$ $\frac{3u}{2c} + \sqrt{\left(\frac{9u^2}{4c^2} + 2\right)}$.

17. Per determinare il valore del massimo effetto, che può ottenersi dal Mulino a vento, prendo dall'equazione tang. $\varphi^2 - \frac{3ux \text{ tang. } \varphi}{ac}$ $- 2 =$ o il valore di $x = \frac{ac \text{ tang. } \varphi}{3u} -$

2ac

$\frac{2ac}{3u \text{ tang. } \varphi}$, e differenziando ricavo

$dx = \frac{acd\varphi}{3u}\left(\frac{1}{\cos. \varphi^2} + \frac{2}{\text{sen. } \varphi^2}\right) = \frac{acd\varphi\,(\text{sen. } \varphi^2 + 2\cos. \varphi^2)}{3u \cos. \varphi^2 \text{ sen. } \varphi^2}$, e moltiplicando per

$x = \frac{ac}{3u}\left(\frac{\text{sen. } \varphi}{\cos. \varphi} - \frac{2\cos. \varphi}{\text{sen. } \varphi}\right) = \frac{ca\,(\text{sen. } \varphi^2 - 2\cos. \varphi^2)}{3u \cos. \varphi \text{ sen. } \varphi}$ trovo $xdx = \frac{a^2c^2d\varphi\,(\text{sen. } \varphi^4 - 4\cos. \varphi^4)}{9u^2 \cos. \varphi^3 \text{ sen. } \varphi^3}$.

Parimente rinvienfi $\left(c \text{ sen. } \varphi - \frac{ux \cos. \varphi}{a}\right)^2 = \left(c \text{ sen. } \varphi - \frac{1}{3}c \text{ sen. } \varphi + \frac{2c \cos. \varphi^2}{3 \text{ sen. } \varphi}\right)^2 = \frac{4c^2}{9 \text{ sen. } \varphi^2}$. Laonde foftituiti quefti valori nell' efpreffione del momento dell' impulfo per rapporto ad un' Ala fola $\frac{bu}{a}\int xdx \times \left(c \text{ sen. } \varphi - \frac{ux \cos. \varphi}{a}\right)^2 \cos. \varphi$, ci fi offre pel maffimo, che cerchiamo, la formola $\frac{4bac^4}{81u}\int \frac{d\varphi\,(\text{sen. } \varphi^4 - 4\cos. \varphi^4)}{\cos. \varphi^2 \text{ sen. } \varphi^5} = \frac{4bac^4}{81u}\int\left(\frac{d\varphi}{\cos. \varphi^2 \text{ sen. } \varphi} - \frac{4d\varphi \cos. \varphi^2}{\text{sen. } \varphi^5}\right) =$

Pp $\quad 4bac^4$

$$\frac{4bac^4}{81u}\left(\int\frac{d\varphi}{\text{sen.}\,\varphi}+\int\frac{d\varphi\,\text{sen.}\,\varphi}{\text{cos.}\,\varphi^2}-4\int\frac{d\varphi\,\text{cos.}\,\varphi^2}{\text{sen.}\,\varphi^5}\right)$$

$$=\frac{4bac^4}{81u}\left(\int\frac{d\varphi}{\text{sen.}\,\varphi}+\int\frac{d\varphi\,\text{sen.}\,\varphi}{\text{cos.}\,\varphi^2}-\right.$$

$$\left.4\int\frac{d\varphi}{\text{sen.}\,\varphi^5}+4\int\frac{d\varphi}{\text{sen.}\,\varphi^3}\right)$$. Ora dalla teoria degl' integrali delle formole differenziali trigonometriche si hanno i seguenti risultati:

1°. $\int\frac{d\varphi}{\text{sen.}\,\varphi}=\log.\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,\varphi$.

2°. $\int\frac{d\varphi\,\text{sen.}\,\varphi}{\text{cos.}\,\varphi^2}=\frac{1}{\text{cos.}\,\varphi}$.

3°. $\int\frac{d\varphi}{\text{sen.}\,\varphi^5}=-\frac{3\,\text{cos.}\,\varphi}{8\,\text{sen.}\,\varphi^2}-\frac{\text{cos.}\,\varphi}{4\,\text{sen.}\,\varphi^4}$
$+\frac{3}{8}\log.\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,\varphi$.

4°. $\int\frac{d\varphi}{\text{sen.}\,\varphi^3}=-\frac{\text{cos.}\,\varphi}{2\,\text{sen.}\,\varphi^2}+$
$\frac{1}{2}\log.\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,\varphi$.

Perlocchè l' espressione del massimo effetto del Mulino sarà $\frac{4bac^4}{81u}\left(\frac{1}{\text{cos.}\,\varphi}-\frac{\text{cos.}\,\varphi}{2\,\text{sen.}\,\varphi^2}+\frac{\text{cos.}\,\varphi}{\text{sen}\,\varphi^4}+\frac{3}{2}\log.\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,\varphi\right)+$ Cost. per rapporto ad un' Ala. E siccome svanisce un tal effetto, allorchè $x=0$, cioè tang. $\varphi=\sqrt{2}$, sen. $\varphi=\sqrt{\frac{2}{3}}$, cos. $\varphi=\sqrt{\frac{1}{3}}$, e tang. $\frac{1}{2}\,\varphi$ $=\frac{\text{sen.}\,\varphi}{1+\text{cos.}\,\varphi}=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$; sarà perciò Cost. $=$

$$= -\frac{4bac^4}{81u}\left(\sqrt{3} - \frac{3}{4\sqrt{3}} + \frac{9}{4\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\log.\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right) = -\frac{4bac^4}{81u}\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\log.\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)$$; e l' integrale completo diventa $\frac{4bac^4}{81u}\left(\frac{1}{\cos.\varphi} - \frac{\cos.\varphi}{2\,\text{sen}.\varphi^2} + \frac{\cos.\varphi}{\text{sen}.\varphi^4} + \frac{3}{2}\log.\text{tang}.\frac{1}{2}\varphi - \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\log.\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)$, che esprime la quantità dell' effetto massimo corrispondente a quella parte indefinita dell'Ala, la quale si estende fino al termine, dove l' Ala s' inchina all' asse del Mulino sotto l' angolo indeterminato φ. Conseguentemente per conoscere l' effetto massimo per rapporto all' Ala intera converrà prendere l' angolo φ tale, che la sua tangente sia $= \frac{3u}{2c} + \sqrt{\left(\frac{9u^2}{4c^2} + 2\right)}$, il qual angolo chiameremo f. E se fatto ciò moltiplicheremo la formola per n numero dell' Ali, otterremo in fine il total massimo effetto del Mulino espresso dalla quantità $\frac{4nbac^4}{81u} \times \left(\frac{1}{\cos.f} - \frac{\cos.f}{2\,\text{sen}.f^2} + \frac{\cos.f}{\text{sen}.f^4} + \frac{3}{2}\log.\text{tang}.\frac{1}{2}f - \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\log.\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)$.

ARTICOLO II.

Delle figure di equilibrio, alle quali si riducono i fluidi, le cui particelle sono agitate da quali forze si vogliano.

18 La figura, che dee prendere una massa fluida, tutte le particelle della quale sono animate da forze quali si sieno, è stata un oggetto particolare delle sublimi speculazioni de' primi Geometri dell' età nostra CLAIRAUT, BOUGUER, EULERO, D'ALEMBERT. Dalle loro ricerche applicate al problema generale della figura de' Pianeti considerati in un primitivo stato di fluidità è risultata l'insufficienza così del principio d'HUYGENS, che *una massa fluida per conservarsi in equilibrio basta, che abbia la superficie per ogni dove perpendicolare alla direzione della forza sollecitante*, come pure dell' altro principio di NEWTON, che *a stabilir l'equilibrio di una massa di fluido basta l'equilibrio di due colonne qualunque, che si estendono dalla superficie fino al centro della massa;* e si è agevolmente riconosciuto, che il primo dei due principj non dà l'equilibrio che sulla superficie, il secondo non lo dà che nell' interno della massa: anzi CLAIRAUT è giunto fin anco a dimostrare contro l'opinione di BOUGUER, che quand' anche que-

questi due principj si accordino a dare la medesima curva pel meridiano d'un Pianeta, non sempre però, nè in tutti i casi ha luogo l'equilibrio. Finalmente avendo lo stesso CLAIRAUT colla sua solita eleganza dimostrato, che se una particella qualunque della massa fluida si riferisce a tre assi perpendicolari mediante tre coordinate ortogonali x, y, z, e si risolvono tutte le forze sollecitanti la detta particella in tre altre L, M, N secondo le direzioni delle tre rispettive coordinate, l'equilibrio della massa esige la condizione, che la formola $Ldx + Mdy + Ndz$ sia un differenziale *completo*, il quale possa integrarsi anco senza conoscere le relazioni delle variabili x, y, z; avendo, dissi, CLAIRAUT dimostrata questa memorabile proprietà dell'equilibrio, venne sull'arena il D'ALEMBERT, e colla sua singolare perspicacia ritrovò, che quest'unica condizione non bastava a stabilir l'equilibrio, ma che vi si richiedeva di più l'altra condizione, che la predetta formola, oltre ad essere un differenziale *completo*, avesse un integrale affatto indipendente dalla rettificazione o quadratura di qualsiasi curva rientrante.

Dietro i passi di questi insigni Geometri io esporrò qui brevemente le cose più importanti su tal materia.

19. Prima di tutto è mestieri stabilire come principio fondamentale, che una massa flui-

da non può essere in equilibrio, se la *media* direzione delle forze, dalle quali ciascun punto della sua superficie viene sollecitato, non è perpendicolare alla superficie medesima: imperciocchè se la media direzione delle forze fosse obliqua alla superficie del fluido, risoluta questa forza obliqua, che è la *risultante* di tutte, in due altre, una perpendicolare alla superficie, l'altra in direzione della tangente di lei, niente impedirebbe, che la molecola fluida non dovesse ubbidire all'azione di questa forza tangenziale e muoversi nella direzione della tangente della superficie; e però la massa fluida non sarebbe in equilibrio.

Avanti dunque di entrare in questa indagine incominceremo dal determinare in generale la posizione della retta perpendicolare a qualunque data superficie. Sia pertanto proposta una superficie (*Fig.* 5.), sulla quale trovasi il punto qualunque K: trattasi di determinare la posizione della retta KP, che è perpendicolare alla detta superficie nel punto K. Prima di tutto convien esprimere con un'acconcia formola analitica la natura di questa superficie; ed a tale oggetto è d'uopo prendere ad arbitrio tre assi AB, AC, AD perpendicolari fra loro, de' quali i due primi sono situati nel piano della Tavola, e il terzo è normale a quel piano. Dal punto K della proposta superficie si guida al piano CAB la normale KH, e dal pun-

Fig. 5.

punto H all' asse AB la normale HG; dal che risultano le tre coordinate ortogonali $AG = x$, $GH = y$, $HK = z$, le quali determinano la posizione del punto K. Qualunque sia fra queste tre coordinate x, y, z l' equazione esprimente la natura della superficie, è di per se manifesto, che il differenziale di tal equazione sarà sempre un' equazione della forma $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, dove le quantità X, Y, Z sono funzioni qualunque delle coordinate x, y, z.

Se presentemente si sega la superficie data con un piano IHK parallelo al piano BAD, la sezione risultante EK sarà, come è evidente, rappresentata dall' equazione differenziale della superficie, purchè in essa si prenda costante la $y = GH$, e però $dy = 0$: conseguentemente la detta linea curva EK avrà per equazione differenziale $Xdx + Zdz = 0$, in cui X, e Z sono funzioni delle due coordinate x, z di questa curva. Nel piano di tal curva sia KM normale alla medesima in K; e poichè è già noto dal Calcolo differenziale, che la sottonormale HM è $= \frac{zdz}{dx}$, e per l' equazione della curva si ha $\frac{dz}{dx} = - \frac{X}{Z}$; quindi nasce la sottonormale $HM = - \frac{Xz}{Z}$.

Nel piano *BAC*, a cui è normale il piano della curva, si tiri da *M* la retta *MP* perpendicolare ad *HM* comune sezione de' due piani perpendicolari *BAC*, *EKM*; ed essendo perciò la *MP* normale al piano *EKM*, a questo piano sarà anche normale il piano *KMP*: e siccome alla comune sezione *KM* di questi due piani è perpendicolare la curva in *K*, essa curva ovvero il suo elemento in *K* sarà anche perpendicolare al piano *KMP*; e conseguentemente tutte le rette, che dal punto *K* vanno alla retta *MP*, saranno perpendicolari alla curva.

Si faccia ora segare similmente la superficie proposta col piano *KFG* parallelo al piano *CAD*, ed essendo *KF* la sezione, che ne risulta, l'equazione differenziale di questa linea *KF* sarà l'equazione generale della superficie, qualora si piglj costante la $x = AG$, e però $dx = 0$: onde l'equazione della curva *KF* sarà $Ydy + Zdz = 0$, essendo Y, e Z funzioni delle sue coordinate y, z. Si conduca nel piano di detta curva la sua normale *KN*; e sarà la sottonormale $HN = \frac{zdz}{dy}$, cioè per essere $\frac{dz}{dy} = -\frac{Y}{Z}$, sarà $HN = -\frac{Yz}{Z}$. Tirata nel piano *BAC* dal punto *N* la *NP* perpendicolare alla *HN* comune sezione de' due piani normali *BAC*, *KFG*, è chiaro, come dian-

dianzi, che tutte le rette condotte dal punto K alla NP sono perpendicolari alla curva KF in K. Perlocchè se dall'intersezione P delle due rette MP, NP viene guidata la retta PK, essa sarà perpendicolare all'una ed all'altra delle due curve EK, FK, e conseguentemente perpendicolare alla data superficie, di cui sono sezioni le dette curve.

Per trovare pertanto il punto P, dove la normale KP incontra il piano BAC, basta prendere $HM = -\frac{Xz}{Z}$, ed $HN = -\frac{Yz}{Z}$, e compire il rettangolo $HMPN$, il cui angolo P dà il punto cercato; ed è evidente, che dall' equazione differenziale della superficie $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ si ricavano immantinente i valori di $HM = -\frac{Xz}{Z}$, e di $HN = -\frac{Yz}{Z}$, come pure della normale stessa $KP = \sqrt{(KH^2 + HP^2)} = \sqrt{(KH^2 + HM^2 + MP^2)} = \sqrt{\left(z^2 + \frac{X^2z^2}{Z^2} + \frac{Y^2z^2}{Z^2}\right)} = \frac{z}{Z}\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$.

20. Determinata così la posizione della normale ad una superficie qualunque riesce ora facilissimo di ritrovare la natura e proprietà delle forze, che agendo sul punto K d'una super-

perficie proposta hanno la loro media direzione, ovvero la direzione della loro risultante, perpendicolare alla superficie. Imperciocchè qualunque sieno le forze sollecitanti il punto K, elle possono sempre ridursi a tre secondo le direzioni parallele ai tre assi arbitrarj AB, AC, AD, ai quali si riferisce la superficie; e però chiamata Q la forza che agisce in K parallelamente ad AB, R la forza parallela ad AC, ed S la forza parallela ad AD, la loro media direzione, che pel supposto debb' essere perpendicolare alla superficie, coinciderà colla normale KP, della quale si è precedentemente determinata la posizione. Sia dunque Θ la risultante delle tre forze Q, R, S, la quale agisce nella direzione PK: si risolva essa in due altre secondo le direzioni normali KH, HP; e nascerà nella direzione HK la forza $= \frac{HK}{KP} \cdot \Theta$, e nella direzione parallela ad HP la forza $= \frac{HP}{KP} \cdot \Theta$; e risolvendo parimente questa forza $\frac{HP}{KP} \cdot \Theta$ in altre due secondo le direzioni HM, ed HN si avrà nella direzione HM la forza $= \frac{HM}{KP} \cdot \Theta$, e nella direzione HN la forza $= \frac{HN}{KP} \cdot \Theta$. Laonde la forza risul-

sultante Θ resta risoluta in tre rispettivamente parallele ai tre assi AB, AC, AD, cioè

1°. nella forza $\frac{HM}{KP} \cdot \Theta$, che agisce parallelamente ad AB:

2°. nella forza $\frac{HN}{KP} \cdot \Theta$, che agisce parallelamente ad AC.

3°. nella forza $- \frac{KH}{KP} \cdot \Theta$, che agisce parallelamente ad AD, e che si prende negativamente, perchè la sua direzione KH, cioè da K verso H è contraria a quella dell'asse AD da A verso D, alla quale essa forza viene riferita.

Ora affinchè la forza Θ perpendicolare alla superficie, ed agente in direzione KP sia equivalente alle forze Q, R, S, bisogna, che queste sieno rispettivamente uguali alle tre precedenti, nelle quali è stata risoluta la forza Θ; e però nascono le equazioni

$$Q = \frac{HM}{KP} \cdot \Theta \; ; \; R = \frac{HN}{KP} \cdot \Theta \; ; \; S = - \frac{KH}{KP} \cdot \Theta.$$

Essendo adunque $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ l'equazione differenziale della proposta superficie, ed essendosi già ritrovato $HM = - \frac{Xz}{Z}$, $HN = - \frac{Yz}{Z}$, $KP = \frac{z}{Z} \sqrt{(} X^2 + Y^2$

+

$+ Z^2)$, posto $\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} = N$, si ottengono per ultimo le tre equazioni.

$$\text{I}^\circ.\quad Q = -\frac{X}{N}\cdot\Theta;$$

$$\text{II}^\circ.\quad R = -\frac{Y}{N}\cdot\Theta;$$

$$\text{III}^\circ.\quad S = -\frac{Z}{N}\cdot\Theta;$$

dalle quali si deduce questa bella proprietà, che *le tre forze* Q, R, S, *che agiscono secondo le rispettive direzioni delle tre coordinate* x, y, z *della superficie proposta, stanno fra loro come le quantità* X, Y, Z, *che nell' equazione differenziale della superficie moltiplicano gli elementi delle medesime coordinate.*

PROBLEMA V.

21. *Ritrovare la figura alla quale viene ridotta una massa fluida, sollecitata in ciascuna delle sue particelle da quali forze si vogliano.*

SOLUZIONE.

Piglisi ad arbitrio un punto K sulla superficie della massa fluida, di cui si cerca la figura, e le tre coordinate ortogonali appartenenti a questo punto sieno $AG = x$, $GH = y$, $HK = z$: si tratta di trovare un' equazione fra x, y, z, la quale rappresenti la figura della massa fluida proposta. Suppongo, che il differenziale di siffatta equazione sia $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, essendo X, Y, Z funzioni delle tre variabili x, y, z insieme. E poichè

chè tutte le forze, dalle quali viene sollecitato il punto K, possono ridursi a tre secondo le direzioni delle dette tre coordinate, chiamo Q la forza che agisce parallelamente ad AG, R la forza che agisce parallelamente a GH, ed S la forza agente nella direzione HK. Ora, siccome la natura dell'equilibrio da noi supposto nel fluido esige, che la media direzione di queste tre forze sia perpendicolare alla superficie nel punto K, se si chiama Θ la forza equivalente alle tre Q, R, S, ossia la loro risultante, e si fa $N = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$, abbiamo dalle cose premesse le tre seguenti equazioni $Q = - \frac{X}{N} \cdot \Theta$; $R = - \frac{Y}{N} \cdot \Theta$; $S = - \frac{Z}{N} \cdot \Theta$, dalle quali si ricava $X = - \frac{N}{\Theta} \cdot Q$; $Y = - \frac{N}{\Theta} \cdot R$; $Z = - \frac{N}{\Theta} \cdot S$; e sostituendo questi valori nell'assunta equazione differenziale $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, questa si cangia in $- \frac{N}{\Theta}(Qdx + Rdy + Sdz) = 0$, che divisa per $- \frac{N}{\Theta}$ diventa $Qdx + Rdy + Sdz = 0$. Dal che apparisce, che conoscendo le forze Q, R, S, le quali sollecitano ciascun punto della massa fluida secondo le direzioni delle tre coordinate x, y, z si conoscerà parimente l'equazione differenziale della figu-

figura, in cui la massa fluida dee conformarsi per restare in equilibrio. Il che era ec.

22. Fa d'uopo osservare in questo proposito, che se le forze Q, R, S non sono funzioni tali di x, y, z, che riesca integrabile ossia riducibile a quantità finite l'equazione $Qdx + Rdy + Sdz = 0$, la figura della superficie non è possibile. Ora si sa dal Calcolo Integrale, che laddove qualunque equazione differenziale a due sole variabili deriva sempre da un'equazione in termini finiti fra le medesime quantità variabili per modo che essendo questa differenziata nasce precisamente la proposta, sebbene assai spesso non possa assegnarsi questa equazione integrale; la cosa non è più così allorchè trattasi di equazioni differenziali, che contengono tre quantità variabili come x, y, z, o più; imperciocchè vi sono infiniti casi, nè quali è assolutamente impossibile, che una tal equazione risulti dalla differenziazione d'un'equazione espressa in termini finiti. Un chiaro esempio di siffatte equazioni differenziali impossibili lo abbiamo nell'equazione semplicissima $xdx + ydy + xdz = 0$: avvegnacchè essendo i due primi termini $xdx + ydy$ integrabili immediatamente, non è possibile ritrovare un fattore, pel quale essendo moltiplicata l'equazione, essa divenga integrabile.

23. Quali poi sieno le condizioni, sotto le quali un'equazione differenziale a tre o più

va-

variabili diventa possibile o impossibile, mercè le insigni scoperte de' moderni Analisti nel Calcolo Integrale è oggimai noto abbastanza. Così già sanno i Geometri, che un' equazione di questa forma $Qdx + Rdy + Sdz = 0$ non è possibile se non ne' casi, ne' quali si avrà

$$Q\left(\frac{dR}{dz} - \frac{dS}{dy}\right) + R\left(\frac{dS}{dx} - \frac{dQ}{dz}\right) + S\left(\frac{dQ}{dy} - \frac{dR}{dx}\right) = 0,$$

dove $\frac{dR}{dz}$ esprime, come è noto, il differenzial *parziale* della funzione R nel supposto della sola variazione di z, il cui differenziale dz resta distrutto dal denominatore, per modo che $\frac{dR}{dz}$ non contiene se non quantità finite; e così pure $\frac{dS}{dy}$, $\frac{dQ}{dz}$ ec. sono quantità finite, perchè i denominatori distruggono i differenziali delle rispettive variabili ne' numeratori. Dunque tutte le volte che la proprietà contenuta in questa equazione finita non avrà luogo tra le funzioni Q, R, S, l' equazione differenziale $Qdx + Rdy + Sdz = 0$ sarà assolutamente impossibile, nè potrà mai esser nata dalla differenziazione di qualsivoglia finita equazione. Da ciò deriva immantinente, che *se le tre forze* Q, R, S, *alle quali si riducono tutte quelle che agiscono contro qualunque data particella della massa fluida, non sono funzioni*

tali

tali delle variabili x, y, z, *che possa verificarsi l'equazione* $Q\left(\frac{dR}{dz} - \frac{dS}{dy}\right) + R\left(\frac{dS}{dx} - \frac{dQ}{dz}\right) + S\left(\frac{dQ}{dy} - \frac{dR}{dx}\right) = 0$, *la massa fluida non potrà mai arrivare allo stato dell' equilibrio*.

24. Il caso il più semplice ed evidente, nel quale l'equazione differenziale $Qdx + Rdy + Sdz = 0$ diventa possibile, si ha nel supposto, che Q. sia una funzione della sola variabile x, R una funzione della sola y, ed S una funzione della sola z; poichè allora ogni termine dell'equazione è integrabile di per se. Quindi è, che se ciascuna particella della massa fluida verrà sollecitata da tre forze Q, R, S secondo le direzioni delle tre coordinate ortogonali x, y, z, e la forza Q agente nella direzione di x verrà espressa da una funzione qualunque di x, la forza R agente nella direzione di y da una funzione di y, e la forza S agente nella direzione di z da una funzione di z, allora l'equazione differenziale $Qdx + Rdy + Sdz = 0$ diventando integrabile, la figura della massa fluida viene rappresentata da questa equazione integrale $\int Qdx + \int Rdy + \int Sdz = \text{Cost.}$, dove la Cost. resta determinata dalla quantità della massa fluida proposta. In questo caso adunque la detta massa si ridurrà allo stato dell'equilibrio, ed in ciascun punto della su-

superficie il valore di questa formola $\int Qdx + \int Rdy + \int Sdz$ sarà assolutamente lo stesso.

PROBLEMA VI.

25. *Una massa fluida essendo attratta in tutti i suoi punti verso molti centri fissi* (Fig. 6) C, C′, C″ *da forze espresse da funzioni qualunque delle distanze dai detti centri, ritrovare la figura, a cui questa massa stabilmente si ridurrà.*

SOLUZIONE.

Prendasi ad arbitrio un punto qualunque K della superficie del fluido, e le sue distanze dai centri fissi C, C', C'' sieno $KC = p$, $KC' = p'$, $KC'' = p''$. Le forze, dalle quali il punto K è attratto verso i detti centri, si nominino P, P', P'' le quali sieno funzioni delle distanze rispettive p, p', p'', cioè la forza P, che attrae nella direzione KC, sia una funzione qualunque di p, la forza P' attraente nella direzione KC' una funzione di p', e la forza P'' nella direzione KC'' una funzione qualsivoglia di p''. Ciò posto si scelgano tre assi perpendicolari fra loro, ai quali si guidino dal punto K parallele le indefinite KM, KF, KE, e secondo queste si risolvano le forze P, P', P'', che agiscono sul punto K. Basta a tal effetto immaginare de' piani paralleli al

 piano

piano MKF, i quali passino pe' centri C, C', C'' ciascuno per ciascun centro, e saranno in conseguenza perpendicolarmente attraversati dalla retta KE nei punti B, B', B''. In questi piani si tirino le rette CD, $C'D'$, $C''D''$ parallele a KM, ed a queste le perpendicolari BD, $B'D'$, $B''D''$, che saranno parallele a KF: Da ciò risultano per ciaschedun centro C, C', C'' tre coordinate ortogonali, le quali pel centro C sono $CD = x$, $DB = y$, $BK = z$; pel centro C' sono $C'D' = x'$, $D'B' = y'$, $B'K = z'$; e pel centro C'' sono $C''D'' = x''$, $D''B'' = y''$, $B''K = z''$.

Ora da queste coordinate abbiamo immantinente le seguenti equazioni $pp = xx + yy + zz$; $p'p' = x'x' + y'y' + z'z'$; $p''p'' = x''x'' + y''y'' + z''z''$. E siccome le variabili x, x', x''; y, y', y''; z, z', z'' non differiscono fra loro, come è evidente, se non di quantità costanti, i loro differenziali saranno uguali, cioè $dx = dx' = dx''$; $dy = dy' = dy''$; $dz = dz' = dz''$. Fatta quindi la risoluzione della forza attratrice secondo KC in tre altre forze secondo KM, KF, KE si trova

Forza secondo $KM = \frac{Px}{p}$;

Forza secondo $KF = \frac{Py}{p}$;

Forza secondo $KE = \frac{Pz}{p}$.

Dalla

Dalla risoluzione della forza attraente nella direzione KC' in altra tre forze secondo le predette direzioni si ha

Forza secondo $KM = \frac{P'x'}{p'}$;

Forza secondo $KF = \frac{P'y'}{p'}$;

Forza secondo $KE = \frac{P'z'}{p'}$.

Così pure la risoluzione della forza secondo KC'' ci dà

Forza secondo $KM = \frac{P''x''}{p''}$;

Forza secondo $KF = \frac{P''y''}{p''}$;

Forza secondo $KE = \frac{P''z''}{p''}$.

Laonde sommando insieme le forze che agiscono nella medesima direzione, risulteranno le forze totali seguenti

Forza secondo $KM = \frac{Px}{p} + \frac{P'x'}{p'} + \frac{P''x''}{p''}$;

Forza secondo $KF = \frac{Py}{p} + \frac{P'y'}{p'} + \frac{P''y''}{p''}$;

Forza secondo $KE = \frac{Pz}{p} + \frac{P'z'}{p'} + \frac{P''z''}{p''}$;

Ma queste forze sono quelle, che nel Problema antecedente abbiamo chiamato Q,

R, S, se non che agiscono per direzioni contrarie a queste ultime, come è visibile: dunque avremo

$$Q = -\frac{Px}{p} - \frac{P'x'}{p'} - \frac{P''x''}{p''};$$
$$R = -\frac{Py}{p} - \frac{P'y'}{p'} - \frac{P''y''}{p''};$$
$$S = -\frac{Pz}{p} - \frac{P'z'}{p'} - \frac{P''z''}{p''}.$$

Ed essendo per lo stesso Problema precedente la figura della superficie del fluido espressa dall'equazione differenziale $Qdx + Rdy + Sdz = 0$; se si sostituiscono i valori di Q, R, S, e si cambiano i segni, la stessa equazione si cangia in quest'altra

$$\begin{aligned}&\frac{Pxdx}{p} + \frac{P'x'dx'}{p'} + \frac{P''x''dx''}{p''}\\ +&\frac{Pydy}{p} + \frac{P'y'dy'}{p'} + \frac{P''y''dy''}{p''} = 0,\\ +&\frac{Pzdz}{p} + \frac{P'z'dz'}{p'} + \frac{P''z''dz''}{p''}\end{aligned}$$

dove a dx si è sostituito dx', e dx''; a dy parimente dy', e dy''; come pure dz', e dz'' in luogo di dz.

Differenziando poi i valori dianzi ritrovati di pp, $p'p'$, $p''p''$ se ne ricava

$$pdp = xdx + ydy + zdz;$$
$$p'dp' = x'dx' + y'dy' + z'dz';$$
$$p''dp'' = x''dx'' + y''dy'' + z''dz'';$$

e

e surrogati questi valori nella precedente equazione, risulta per ultimo $Pdp + P'dp' + P''dp'' = 0$, di cui ciascun termine è integrabile da se; e però avremo per la ricercata figura della massa fluida l'equazione integrale $\int Pdp + \int P'dp' + \int P''dp'' = \text{Cost.}$ Il che era ec.

26. A questa stessa equazione si giugne anco senza aver riguardo alla posizione de' tre assi, la quale è arbitraria, e che non si trova più nell'equazione finale. Basta a tal uopo considerare un elemento infinitamente piccolo Kk sulla superficie della massa fluida; indi risolvere tutte le forze, che sollecitano il punto K, in due altre, le une secondo la direzione dell'elemento Kk, le altre secondo una direzione perpendicolare a Kk, quelle dette perciò *tangenziali*, queste *perpendicolari*. Ciò fatto, egli è manifesto, che affinchè il punto K possa mantenersi in equilibrio, tutte le forze tangenziali debbono svanire; imperciocchè, se le forze agenti secondo Kk non si distruggessero l'una l'altra intieramente, il punto K dovrebbe necessariamente ubbidire all'impulso secondo Kk, e muoversi in questa direzione, che è quanto dire non rimarrebbe più in quiete o in equilibrio. Per trovare queste forze tangenziali, si menino dal punto k sulle distanze KC, KC', KC'' le perpendicolari kn, kn', kn''; e facendo

 cendo

cendo l' elemento $Kk = ds$ avremo $Kn = -dp$, $Kn' = -dp'$, $Kn'' = -dp''$: quindi la similitudine de' triangoli elementari Kkn, Kkn', Kkn'' ai triangoli, che si formano abbassando dai punti C, C', C'' delle perpendicolari sull' elemento Kk prolungato, somministra i valori delle forze tangenziali, che risultano dalla risoluzione delle forze attraenti P, P', P'', cioè dalla risoluzione della forza P nasce la tangenziale $-\frac{Pdp}{ds}$, dalla risoluzione di P' la tangenziale $-\frac{P'dp'}{ds}$, e dalla risoluzione di P'' la tangenziale $-\frac{P''dp''}{ds}$. Ma la somma di queste forze tangenziali debb' essere uguale a zero: si otterrà dunque per la figura della massa fluida l' equazione $-\frac{Pdp}{ds}-\frac{P'dp'}{ds}-\frac{P''dp''}{ds}=0$, oppure cambiando i segni e moltiplicando per ds, si avrà l' equazione $Pdp + P'dp' + P''dp'' = 0$, che integrata diventa $\int Pdp + \int P'dp' + \int P''dp'' =$ Cost., come dianzi.

Laonde venendo la massa fluida sollecitata in tutti i suoi punti verso molti centri fissi da forze proporzionali a funzioni qualunque delle distanze dai detti centri, essa arriverà allo stato di equilibrio, ed

ed allora prenderà una figura dotata di questa proprietà, che per ciascun punto della superficie del fluido la somma degl' integrali di ciascuna forza moltiplicata per l' elemento della rispettiva distanza dal centro è sempre la stessa.

PROBLEMA VII.

27. *Ritrovare la figura d' una sferoide fluida rotante intorno al suo asse, nel supposto, che le parti del fluido vengano attratte verso il centro della Sferoide da una forza proporzionale ad una potestà qualunque della distanza dal centro.*

SOLUZIONE.

Sia PQ (*Fig.* 7.) l' asse della rotazione, *Fig.* 7. $PAQB$ la sezione della Sferoide fatta per l'asse, AB il diametro dell' equatore, C il centro. Supposta pertanto la quiete rispettiva, ovvero l' equilibrio delle parti del fluido, tutte le colonne che si stendono dalla superficie al centro aver debbono lo stesso peso verso il centro, cioè esercitare lo stesso sforzo verso un tal punto, altrimenti non potrebbono tra loro bilanciarsi. Una di siffatte colonne di fluido, che qui suppongo puramente lineari, sia $CD = r$, la quale formi coll' asse PQ l' angolo DCP, il cui seno $= h$. La parte indefinita CG di detta colonna pongasi $= v$, e però il cilindretto infinitesimo $Gg = dv$; ed abbassate sull' asse le perpendicolari GL, DE, si faccia

 il

il semidiametro dell' equatore $AC = a$, e la gravità assoluta in $A = p$. Ciò fatto, se le gravità delle particelle del fluido verso il centro sono come le potenze d' indice n delle distanze dal centro, risulta la gravità in $G = \frac{pv^n}{a^n}$. Siccome poi per la rivoluzione di tutta la massa intorno all' asse PQ tutte le particelle del fluido concepiscono una forza centrifuga proporzionale ai raggi de' cerchi, che contemporaneamente descrivono; perciò chiamata f la forza centrifuga in A ne nasce la forza centrifuga in $G = \frac{f.CG}{CA} = \frac{hfv}{a}$. Rappresenti GH prolungamento di GL questa forza centrifuga $\frac{hfv}{a}$, e si risolva nelle due GK, KH, quella in direzione della colonna, questa normale a lei, delle quali la prima distrugge una parte della gravità, la seconda nè accresce, nè sminuisce la stessa gravità: e trovasi la forza $GK = h.GH = \frac{h^2fv}{a}$. Sarà dunque la gravità residua, o la tendenza di A verso il centro $C = \frac{pv^n}{a^n} - \frac{h^2fv}{a}$, la quale moltiplicata per dv dà il peso del cilindretto infinitesimo $Gg =$

pv

$\frac{pv^n dv}{a^n} - \frac{h^2 f v dv}{a}$, donde integrando si trova il peso della colonna indeterminata $CG = \frac{pv^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{h^2 f v^2}{2a}$, e fatto $v = r$ si ottiene il peso di tutta la colonna $CD = \frac{pr^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{h^2 f r^2}{2a}$. Applicata questa espressione alla colonna equatoriale CA, dove $r = a$, $h = 1$, trovasi il peso di $CA = \frac{pa}{n+1} - \frac{1}{2}fa = \frac{(2p - nf - f)a}{2(n+1)}$. E siccome i pesi di queste due colonne per la condizione dell' equilibrio debbono essere eguali; quindi nasce l' equazione $2pr^{n+1} - (n+1)h^2 fr^2 a^{n-1} = (2p - nf - f)a^{n+1}$, che esprime la natura della Sezione $PAQB$. Il che era ec.

28. Se l' attrazione delle molecole del fluido fosse nella ragione semplice inversa della distanza dal centro, allora essendo $n = -1$ diventa il peso dell' elemento $Gg = \frac{padv}{v} - \frac{h^2 f v dv}{a}$; onde integrando nasce il peso della co-

colonna indeterminata $CG = pa \log. v - \frac{h^2 f v^2}{2a} + C$, e di tutta la colonna $CD = pa \log. r - \frac{h^2 f r^2}{2a} + C$; e poichè questo debbe uguagliare il peso della colonna CA, sarà perciò $pa \log. r - \frac{h^2 f r^2}{2a} + C = pa \log. a - \frac{1}{2} fa + C$, ovvero $2pa \log. \frac{r}{a} = \frac{h^2 f r^2}{a} - fa$; e se prendesi e pel numero, che ha per suo logaritmo iperbolico l' unità, se ne deduce l' equazione esponenziale $r = ae^{\left(\frac{h^2 f r^2}{2pa^2} - \frac{f}{2p}\right)}$. Dal che apparisce, che i meridiani della Sferoide proposta sono sempre curve algebraiche fuorchè nella sola ipotesi di $n = -1$, in cui sono trascendenti.

29. Se vuolsi l' equazione di tali meridiani alla maniera ordinaria, vale a dire per mezzo delle coordinate ortogonali, basta condurre la perpendicolare DE all' asse, e stabilire $CE = x$; $DE = y$, e però $r^2 = x^2 + y^2$, ed $hr = y$; e fatte queste sostituzioni nella precedente equazione generale trovasi

$$2p(xx + yy)^{\frac{n+1}{2}} - (n+1) fa^{n-1} yy = (2p - nf - f) a^{n+1}.$$

Così

Così nel caso particolare di $n = -1$ l' equazione trascendente de' meridiani diventa $x^2 + y^2 = ae^{\left(\frac{fy^2}{pa^2} - \frac{f}{p}\right)}$.

30. Per determinare ora la proporzione del diametro dell' equatore all' affe della Sferoide, pongo $h = o$, che dà $r = CP = b$; e l' equazione generale diviene $2pb^{n+1} = (2p - nf - f) a^{n+1}$, e conseguentemente $a : b :: (2p)^{\frac{1}{n+1}} : (2p - nf - f)^{\frac{1}{n+1}}$. Da ciò si ricava, che essendo n qualunque numero positivo così intero, come rotto, vale a dire essendo la gravità proporzionale a qualunque potenza diretta delle distanze il diametro dell' equatore supera sempre l' affe di rivoluzione.

Supposto poi n negativo, cioè $-n$, e però la gravità proporzionale a qualche potenza inversa delle distanze dal centro, risulta l' analogia $a : b :: (2p)^{\frac{1}{1-n}} : (2p + nf - f)^{\frac{1}{1-n}}$, e questa, nell' ipotesi di $n < 1$, fatto $k = 1 - n$, diventa $a : b :: (2p)^{\frac{1}{k}} : (2p + kf)^{\frac{1}{k}}$, e nell' ipotesi di $n > 1$, posto $n - 1 = k$, essa

di-

diviene $a : b :: (2p)^{-\frac{1}{k}} : (2p + kf)^{-\frac{1}{k}}$,

cioè $a : b :: (2p + kf)^{\frac{1}{k}} : (2p)^{\frac{1}{k}}$.
E finalmente persistendo in questa supposizione di n negativo, il caso singolare di $n = -1$ offre l'equazione log. a — log. $b = \frac{f}{2p}$. È dunque manifesto, che anche in tutte le ipotesi di n negativo il diametro dell' equatore supera l'asse di rotazione; e quindi generalmente qualunque sia n, positivo o negativo, intero o rotto, cioè qualunque sia la legge dell' attrazione il diametro equatoriale della Sferoide è sempre maggiore dell' asse di rivoluzione.

31. Poichè la figura della Sferoide dipende evidentemente dalla ragione, che ha la forza centrifuga alla gravità, esamineremo nelle tre ipotesi di $n = 0$, $n = 1$, ed $n = -2$ quale esser possa il rapporto di quelle due forze, e quale in conseguenza la figura della Sferoide.

Supposto adunque $n = 0$, cioè uniforme la gravità, abbiamo l'analogia $a : b :: 2p : 2p - f$. Perlocchè nella Sferoide terreste, dove la forza centrifuga sotto l'equatore è $\frac{1}{289}$ della gravità, facendo $p = 289$, $f = 1$ si ri-

ricava $a:b::578:577$. In questa ipotesi della gravità uniforme, se la forza centrifuga sotto l'equatore fosse uguale alla gravità, il che accaderebbe nel nostro globo terracqueo qualora il suo moto diurno fosse diciassette volte più rapido che non è, si avrebbe $a:b::2p:p::2:1$ cioè il diametro dell'equatore doppio dell'asse di rotazione. Che se andasse più e più crescendo la velocità del moto diurno della Terra, e conseguentemente anche la sua forza centrifuga, le parti della Terra successivamente si dissiperebbero, e tutta la massa si ridurrebbe finalmente ad un solo atomo. Dal che si fa palese, che in questa ipotesi della gravità costante il maggiore appianamento, che aver possa la Sferoide verso i suoi poli, non si estende più oltre, che a rendere il diametro dell'equatore doppio dell'asse di rivoluzione; ed in questo caso la Sferoide diventa un composto di due Paraboloidi, siccome è stato dimostrato da HUYGENS nel suo Trattato *De Causa Gravitatis*.

Supposta in secondo luogo la gravità proporzionale alla semplice distanza dal centro, cioè a dire $n=1$, si ha l'analogia $a:b::\sqrt{p}:\sqrt{(p-f)}$. Se adunque la forza centrifuga all'equatore diventasse uguale alla gravità in quel luogo allora pel rapporto infinito $\sqrt{p}:\sqrt{(p-f)}$ il diametro dell'equatore diverrebbe infinitamente più grande dell'asse di rivolu-

zione

zione, che è quanto dire la Sferoide si ridurrebbe ad un piano circolare. E poichè in questa ipotesi la forza centrifuga può avere alla gravità tutti i rapporti possibili compresi fra i limiti del rapporto zero, e del rapporto di ugualianza, oltre il quale la forza centrifuga non può crescere senza il dissipamento delle parti della Sferoide, ne viene in conseguenza che tutte le sorte di appianamento possono darsi nella Sferoide. E di qui il MAUPERTUIS ha tratta la sua ingegnosa spiegazione de' fenomeni di quelle stelle, le quali ora compariscono luminose, ora pressocchè estinte, come pure di quelle, le quali quando appajono di una, e quando di altra grandezza. Siffatte stelle non sono secondo MAUPERTUIS che grandi masse sferoidali molto appianate intorno ai loro poli, le quali, allorchè a noi rivolgono la faccia, si veggono luminose e sferiche; ma se per l'azione de'loro proprj pianeti o per altra qualunque cagione cangian di sito, e ci si mostran di fianco, si vedono più o meno mancar di lume e di grandezza, ed anche totalmente estinguersi, se la loro forma è estremamente schiacciata; ma pigliando nuova situazione tornano a comparire, e così successivamente variando la loro posizione passano gradatamente per tutte le alternative di grandezza e di lume. NEWTON per contrario sospetta, che questi astri sieno luminosi da una sola metà,

e

e dall' altra affatto opachi, e che nel girare intorno ai loro assi rivolgono a noi di quando in quando la metà tenebrosa.

Sia per ultimo la gravità in ragione reciproca de' quadrati delle distanze dal centro, ovvero $n = -2$; ed avremo l'analogia $a : b :: 2p + f : 2p$, dalla quale si scorge, che se la forza centrifuga all'equatore fosse uguale alla gravità in tal luogo il diametro dell'equatore sarebbe sesquialtero dell'asse di rotazione.

32. È per altro da notarsi, che queste ipotesi, nelle quali si assume la gravità o attrazione delle parti del fluido come unicamente diretta ad un punto, non hanno veramente luogo in natura; avvegnachè l'attrazione è reciproca fra tutte le parti, e tutte gravitano le le une nelle altre. E quindi è, che la legge dell'attrazione dipende dalla figura del corpo, e la figura del corpo dalla legge dell'attrazione. Appoggiato NEWTON a questo vero principio di natura ritrovò pel rapporto dell'asse della Terra al diametro dell'equatore quello di 230 a 231, che è notabilmente diverso dal rapporto Hugeniano fondato sopra una semplice ipotesi.

PROBLEMA VIII.

33. *Se una massa fluida girante intorno ad un asse situato fuori di lei viene attratta verso un centro posto in quest' asse con una forza proporzionale ad*

ad una potestà qualunque delle distanze dal centro; mentre intanto dall' attrazione mutua delle parti del fluido risulta verso un altro centro posto dentro la massa un' altra attrazione proporzionale ad una potestà delle distanze da questo centro interiore; si cerca la figura, che prenderà la massa girante.

SOLUZIONE.

Fig. 8. Sia $A\lambda$ (*Fig.* 8.) l' asse, intorno a cui si aggira la massa fluida, γ il centro esteriore di attrazione, ed $ADPaQ$ sia la sezione fatta con un piano perpendicolare alla rotazione, e che passa pel centro γ. Supposto poi C il centro interno di attrazione, si conducano per esso $Aa\gamma$ perpendicolare, e PQ parallela all' asse $A\lambda$. Indi preso sulla colonna lineare CD il punto qualunque G, si guidino la $G\gamma$ al centro esteriore, e la $G\Lambda$ perpendicolare all' asse, e sopra DC prolungata si faccia cadere da γ la perpendicolare γR. Ciò fatto chiamiamo p la gravità di A verso γ, e g la gravità di A verso C, e dicasi f la forza centrifuga in A. Si fissi inoltre $AC = a$, $C\gamma = b$, $CG = v$, sen. $DCP = h$; e sarà $GL = hv$, $CR = hb$, $G\gamma = \sqrt{(b^2 + 2hbv + v^2)}$. Supposto adunque, che la gravità delle parti verso il centro esteriore γ seguiti la ragione delle potenze d' indice m delle distanze da detto centro, troviamo la gravità in G secondo $G\gamma =$

$p(b^2$

$\frac{p(b^2 + 2bhv + v^2)^{\frac{1}{2}m}}{(a+b)^m}$. Risolvo questa forza secondo $G\gamma$ in due, una in direzione di GR, l'altra in direzione di γR perpendicolare alla prima; e stando γG a GR come la forza secondo $G\gamma$ alla forza secondo GR, si ha perciò la forza secondo GR $=$

$$\frac{p(bh + v)(b^2 + 2bhv + v^2)^{\frac{m-1}{2}}}{(a+b)^m}$$, e con questa sola tende il punto G verso il centro interiore C, giacchè l'altra forza in direzione della perpendicolare γR niente altera l'energia della prima.

Inoltre il punto stesso G ha per ipotesi un'altra tendenza verso C proporzionale ad una potenza d'indice n della distanza GC, la qual tendenza sarà conseguentemente $= \frac{gv^n}{a^n}$.

In terzo luogo il punto G ha una forza centrifuga $GH = \frac{f(b + hv)}{a+b}$, la quale si risolve nella forza GK parallela, e nella KH perpendicolare alla colonna CD; e nasce GK $= \frac{hf(b + hv)}{a+b}$; e però la tendenza del punto

G verso il centro C risultante dalla forza centrifuga diviene $= - \frac{hf(b+hv)}{a+b}$.

Laonde la forza intera del punto G verso C sarà uguale alla somma delle tre forze ora ritrovate $\frac{p(bh+v)(b^2+2bhv+v^2)^{\frac{m-1}{2}}}{(a+b)^m} + \frac{gv^n}{a^n} - \frac{hf(b+hv)}{a+b}$, che moltiplicata per l'elemento dv della colonna, e quindi integrata dà il peso della colonna indeterminata CG esercitato verso $C = \int \frac{pdv(bh+v)(b^2+2hbv+v^2)^{\frac{m-1}{2}}}{(a+b)^m} + \int \frac{gv^n dv}{a^n} - \int \frac{hfdv(b+hv)}{a+b} =$

$\frac{p(b^2+2hbv+v^2)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)(a+b)^m} + \frac{gv^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhbv}{a+b} - \frac{fh^2v^2}{2(a+b)} +$ Coſt. Fatto perciò $v = CD = r$, risulta il peso di tutta la colonna

lonna CD verso $C = \frac{p(b^2 + 2hbr + r^2)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)(a+b)^m}$ $+ \frac{gr^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhbr}{a+b} - \frac{fh^2r^2}{2(a+b)} +$ Cost. Ma per la legge dell' equilibrio questo peso dee rimanere lo stesso anche per la colonna CA, cioè quando $h = 1$, ed $r = a$: dunque avremo l' equazione

$$\frac{p(b^2 + 2hbr + r^2)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)(a+b)^m} + \frac{gr^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhbr}{a+b} - \frac{fh^2r^2}{2(a+b)} + \text{Cost.} = \frac{p(a+b)}{m+1} + \frac{ga}{n+1} - \frac{fba}{a+b} - \frac{fa^2}{2(a+b)} + \text{Cost.},$$

la quale facendo $a + b = c$, $(m+1)(n+1) = \mu$, si riduce alla seguente

$$2(n+1)pa^n(b^2 + 2hbr + r^2)^{\frac{m+1}{2}} + 2(m+1)gc^m r^{n+1} - 2\mu hfbc^{m-1}a^n r - \mu h^2 fc^{m-1}a^n r^2 = 2(n+1)pa^n c^{m+1} + 2(m+1)ga^{n+1}c^m - 2\mu fba^{n+1}c^{m-1} -$$

$-\mu f a^{n+2} c^{m-1}$; e questa esprime la natura della parte superiore PAQ della proposta Sezione. Il che era ec.

34. Se la gravità del fluido verso il centro esteriore γ sarà in ragione inversa della semplice distanza, vale a dire $m = -1$, l'equazione della Sezione diverrà

$$\tfrac{1}{2}p(a+b)\log.(b^2+2hbr+r^2)+\frac{gr^{n+1}}{(n+1)a^n}-\frac{fhbr}{a+b}-\frac{fh^2r^2}{2(a+b)}=$$

$$\tfrac{1}{2}p(a+b)\log.(a+b)^2+\frac{ga}{n+1}-\frac{fab}{a+b}-\frac{fa^2}{2(a+b)},$$ ovvero $\tfrac{1}{2}pc\log.\frac{(b^2+2hbr+r^2)}{c^2}$

$$+\frac{gr^{n+1}}{(n+1)a^n}-\frac{fh^2r^2}{2c}-\frac{fhbr}{c}=\frac{ga}{n+1}-\frac{fab}{c}-\frac{fa^2}{2c}.$$

E se sarà solamente la gravità verso il centro interiore C quella che seguita la ragione inversa delle distanze semplici dal centro, allora per essere $n = -1$ l'equazione generale del Problema si converte in $ga\log.r$

$$+\frac{p(b^2+2hbr+r^2)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)(a+b)^m}-\frac{fhbr}{a+b}-$$

fh^2

$$\frac{fh^2r^2}{2(a+b)} = ga \log. a + \frac{p(a+b)}{m+1} - \frac{fba}{a+b} - \frac{fa^2}{2(a+b)},$$ ovvero in $ga \log. \frac{r}{a} +$

$$\frac{p(b^2+2hbr+r^2)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)c^m} - \frac{fhbr}{c} - \frac{fh^2r^2}{2c} = \frac{pc}{m+1} - \frac{fba}{c} - \frac{fa^2}{2c}.$$

Che se tanto la gravità verso γ, quanto quella verso C sarà in ragione inversa delle distanze semplici dai rispettivi centri, cioè sarà $m = -1$, ed $n = -1$, l'equazione si cangia in $\frac{1}{2} pc \log. \frac{(b^2+2hbr+r^2)}{c^2} + ga \log. \frac{r}{a} = \frac{fh^2r^2}{2c} + \frac{fhbr}{c} - \frac{fba}{c} - \frac{fa^2}{2c}$.

Da tutto ciò si fa manifesto, che la curva PAQ è sempre algebraica fuorchè ne' tre casi, o di $m = -1$, o di $n = -1$, o di $m = -1$ ed $n = -1$ insieme.

35. Ritrovata l'equazione per la parte PAQ della proposta Sezione si passa facilmente a ritrovarla anche per la parte opposta $P\breve{a}Q$. Fatta quivi la medesima costruzione di prima, come si vede dalla Figura, dove le medesime lettere majuscole e minuscole si corrispondono nelle due parti della Sezione; pongasi la gra-

vità in a verso il centro $\gamma = P$, e la gravità in a verso il centro $C = G$; la forza centrifuga in $a = F$, $Ca = A$, $C\gamma = b$, $Cg = V$, sen. $QCd = H$; e quindi $gl = HV$, $\gamma g = \sqrt{(b^2 - 2HbV + V^2)}$, $Cr = Hb$, $gr = Hb - V$. Ciò posto, la gravità di g verso C trovasi $= \frac{GV^n}{A^n}$; ed essendo la gravità di g verso $\gamma = \frac{P(b^2 - 2bHV + V^2)^{\frac{m}{2}}}{(b-A)^m}$, la sua risoluzione nelle due forze secondo gr, e secondo $r\gamma$ perpendicolare a gr dà l'altra parte di gravità di g verso $C = -$

$$\frac{P(bH - V)(b^2 - 2bHV + V^2)^{\frac{m-1}{2}}}{(b-A)^m}$$; così pure dalla forza centrifuga gh del punto g risulta la gravità gx verso $C = \frac{FH(b - HV)}{b - A}$. Viene dunque il punto g sollecitato verso il centro C da una forza $= P(V - bH)(b^2 - 2bHV + V^2)^{\frac{m-1}{2}} + \frac{GV^n}{A^n} + \frac{FH(b - HV)}{b - A}$; e questa moltiplicata per dV, ed integrata fa co-

no-

noscere il peso della colonna gC verso $C =$

$$\frac{P(b^2 - 2bHV + V^2)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)(b-A)^m} + \frac{GV^{n+1}}{(n+1)A^n} +$$

$$\frac{FHbV}{b-A} - \frac{FH^2V^2}{2(b-A)}$$ + Coſt.; e mettendo $V = Cd = R$ ſi ha il peſo di tutta la colonna Cd verſo $C = \frac{P(b^2 - 2bHR + R^2)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)(b-A)^m}$

$$+ \frac{GR^{n+1}}{(n+1)A^n} + \frac{FHbR}{b-A} - \frac{FH^2R^2}{2(b-A)} +$$

Coſt. Che se ora ſi aſſume $R = A$, ed $H = 1$, riſulta il peſo della colonna aC verſo $C = \frac{P(b-A)}{m+1} + \frac{GA}{n+1} + \frac{FAb}{b-A} - \frac{FA^2}{2(b-A)}$ + Coſt. Dovendo adunque per l'equilibrio eſſere uguali i peſi delle due colonne Cd, Ca verſo il centro C, naſce quindi l'equazione $\frac{P(b^2 - 2bHR + R^2)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)(b-A)^m} + \frac{GR^{n+1}}{(n+1)A^n}$

$$+ \frac{FHbR}{b-A} - \frac{FH^2R^2}{2(b-A)} = \frac{P(b-A)}{m+1} +$$

$$\frac{GA}{n+1} + \frac{FAb}{b-A} - \frac{FA^2}{2(b-A)},$$ la quale determina la natura della curva PaQ.

36. Si potrà subito passare dall' equazione polare della curva PAQ all' equazione espressa per le coordinate perpendicolari $DE = y$, $CE = x$, sostituendo in quella (§. 33.) $x^2 + y^2$ in luogo di r^2, ed y in vece di br; e si avrà $2(n+1)pa^n(b^2 + 2by + x^2$

$$+ y^2)^{\frac{m+1}{2}} + 2(m+1)gc^m(x^2+y)^{\frac{n+1}{2}}$$

$$- 2\mu fbc^{m-1}a^ny - \mu fc^{m-1}a^ny^2 =$$

$$2(n+1)pa^nc^{m+1} + 2(m+1)ga^{n+1}c^m$$

$$- 2\mu fba^{n+1}c^{m-1} - \mu fa^{n+2}c^{m-1}.$$

Così per l' altra porzione PaQ si otterrà l' equazione alle coordinate normali,

$$\frac{P(b^2 - 2by + x^2 + y^2)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)(b-A)^m} +$$

$$\frac{G(x^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)A^n} + \frac{Fby}{b-A} - \frac{Fy^2}{2(b-A)} =$$

P(b

$$\frac{P(b-A)}{m+1}+\frac{GA}{n+1}+\frac{FAb}{b-A}-\frac{FA^2}{2(b-A)}.$$

PROBLEMA IX.

37. *Ritrovare la figura, a cui nello stato di equilibrio si riduce una massa fluida sparsa tutt' al intorno d'un Pianeta, il quale insieme con essa si rivolge intorno ad un asse comune.*

SOLUZIONE.

Supposto che la quantità di materia del Pianeta sia oltre modo più grande di quella del fluido, sicchè possa trascurarsi l'attrazione di questo in paragone dell'attrazione del Pianeta, e supposto altresì, che la figura del Pianeta sia con piccolissimo divario sferica affinchè pe' noti teoremi dell' attrazione de' corpi prossimamente sferici la sua massa attraente possa concepirsi tutta raccolta nel solo centro; sia in tale assunto $NMFCN$ (*Fig.* 9.) la sezione della massa fluida e del Pianeta fatta con un piano, che passa pel centro C del Pianeta, e per l'asse comune di rivoluzione AD, e si riferisca a CM prolungamento del semidiametro CO dell' equatore la curva generatrice FMN mediante le coordinate perpendicolari $GI = y$, $CI = x$. Quindi si conduca dal punto G la GC al centro del Pianeta, la GB normale alla curva NMF, e la HGE normale all' asse di rotazione NF; e si chiami g la gravità o attrazione

Fig. 9.

zione all'equatore del Pianeta, ossia in O, ed f la forza centrifuga nello stesso luogo; e si faccia il semidiametro CO dell'equatore $= 1$.

Ora il corpuscolo G della massa fluida viene spinta da due forze, cioè dall'attrazione verso il centro C nella direzione GC, e dalla forza centrifuga nella direzione GH, delle quali la prima per la nota legge Newtoniana è $= \frac{g}{GC^2} = \frac{g}{x^2 + y^2}$, e la seconda $= f.GE = fx$. Siccome poi si suppone il fluido arrivato ad uno stato permanente, o di equilibrio, la *risultante* di queste due forze riuscir deè perpendicolare alla superficie del fluido, altrimenti essendo obbliqua, il corpuscolo si moverebbe in direzione della tangente, come è già stato precedentemente avvertito. Conseguentemente la *media direzione* delle due forze, vale a dire la direzione della loro *risultante* coincide colla retta GB normale alla curva generatrice in B. Essendo pertanto GC, GH, GB le direzioni delle tre forze, cioè delle due componenti, e della composta o risultante, starà la forza di gravità secondo GC alla forza centrifuga secondo GH come sta GC a CB, vale a dire $\frac{g}{x^2 + y^2} : fx :: GC : CB :: \sqrt{(x^2 + y^2)} : CB$; e quindi si avrà $\frac{g . CB}{x^2 + y^2} = fx\sqrt{(x^2 + y^2)}$.

Ma

Ma la sottonormale $IB = -\frac{ydy}{dx}$, e però $CB = CI - IB = x + \frac{ydy}{dx} = \frac{xdx + ydy}{dx}$. Dunque soſtituendo queſto valore ſi ha $fx\sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{g(xdx + ydy)}{(x^2 + y^2)dx}$, cioè $fxdx = \frac{g(xdx + ydy)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, ed integrando $\frac{1}{2}fx^2 = -\frac{g}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} +$ Coſt. Per determinar la Coſt. dell' integrazione, faccio $x = 0$, nel qual caso diventa $y = CF$. Prendo dunque $CF = b$, e l' equazione ſi cangia in $-\frac{g}{b} +$ Coſt. $= 0$, oſſia Coſt. $= \frac{g}{b}$. Sicchè l' equazione completa sarà $\frac{1}{2}fx^2 = -\frac{g}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} + \frac{g}{b}$, vale a dire $2bg = (2g - bfx^2)\sqrt{(x^2 + y^2)}$, e quadrando $4b^2g^2 = (4g^2 - 4gfbx^2 + b^2f^2x^4)(x^2 + y^2)$; e riducendo, ed ordinando per rapporto ad x ſi ottiene in fine

$$\left.\begin{array}{l} x^6 + y^2x^4 - \frac{4g}{fb}.y^2x^2 + \frac{4g^2}{b^2f^2}.y^2 \\ -\frac{4g}{fb}.x^4 + \frac{4g^2}{b^2f^2}.x^2 - \frac{4g^2}{f^2} \end{array}\right\} = 0,$$

che è un equazione indeterminata del seſto

ſto grado e ad una Linea del ſeſto ordine da deſcriverſi co' metodi uſitati. Il che era ec.

38. Per fiſſare il limite, a cui giugne il fluido ſopra il Pianeta, vale a dire la ſua maſſima altezza, convien riflettere, che dove la forza centrifuga delle particelle del fluido uguaglia la loro gravità verſo il centro del Pianeta, ivi dee terminare il fluido, nè può eſtenderſi più oltre; giacchè al di là di un tal limite la forza centrifuga prevalente alla forza di gravità diſſipa e ſparpaglia le particelle, qualora non voglia pretenderſi, che queſte particelle abbiano una velocità *angolare* differente da quella del reſtante della maſſa, nel qual caſo eſſe dovrebbero conſiderarſi come ſtraniere alla maſſa e non formanti corpo con lei. Laonde ad ogni modo il predetto limite è ſempre nel punto dell' equilibrio delle due forze indicate. Sicchè prendendo la maſſima altezza $CM = x$, l' equilibrio delle forze nel limite M ci offre l' equazione $fx = \frac{g}{x^2}$, dalla quale ſi trae $x = \sqrt[3]{\frac{g}{f}}$. E quindi immantinente ſi ſcorge, che nella noſtra Terra, dove ſta, ſotto l' equatore, la gravità alla forza centrifuga come 189: 1, riſulta $x = \sqrt[3]{189}$, ovvero l' altezza maſſima della noſtra atmoſfera ſopra il centro della Terra è poco più di $6\frac{1}{2}$ ſemidiametri terreſtri, e

e di $5\frac{1}{2}$ sopra la superficie. Così trovasi parimente un tal limite per l'atmosfera di Giove sotto il suo equatore: imperciocchè per l'Astronomia Teorica sta la gravità sulla superficie di Giove alla gravità sulla superficie della Terra come $943:435$, e la gravità sulla superficie della Terra sta alla forza centrifuga nell'equatore terrestre come $289:1$, e la forza centrifuga nell'equatore della Terra sta alla forza centrifuga nell'equatore di Giove nella ragione composta di $1:10$, cioè dei diametri, e di $10^2:24^2$, cioè dei quadrati inversi de' tempi periodici intorno ai loro assi: conseguentemente la gravità nell'equatore di Giove sta alla forza centrifuga in detto luogo nella ragione composta di queste quattro ragioni, cioè di

$$\begin{array}{rcl} 943 & : & 435, \\ 289 & : & 1 \\ 1 & : & 10 \\ 10^2 & : & 24^2, \end{array}$$

dalle quali risulta la ragione di $11:1$. Laonde il ricercato limite per l'atmosfera di Giove sotto il suo equatore sarà ad una distanza $\sqrt[3]{11}$ dal centro di quel Pianeta, vale a dire a poco meno di $2\frac{1}{4}$ semidiametri di Giove, ovvero a $22\frac{1}{2}$ semidiametri terrestri. Con simil discorso si giugne a determinare la massima altezza dell'atmosfera solare sotto l'equatore del Sole: avvegnachè dalla Teoria delle

Forze

Forze Centrali si raccoglie, che la gravità nella superficie del Sole sta alla gravità nella superficie della Terra come 10000:435, e questa alla forza centrifuga nell' equatore terrestre come 289:1, e quest' altra alla forza centrifuga nell' equatore del Sole in ragione composta della diretta semplice de' diametri, cioè di 1:100, e della duplicata inversa de' tempi periodici della loro rotazione intorno ai proprj assi, cioè di $(25 \frac{1}{2})^2 : 1$; e perciò componendo tutte queste ragioni starà la gravità alla forza centrifuga nell' equatore del Sole nella ragione composta delle seguenti

$$\begin{array}{rcl} 10000 & : & 435 \\ 289 & : & 1 \\ 1 & : & 100 \\ (25 \frac{1}{2})^2 & : & 1, \end{array}$$

dalle quali nasce la ragione di 42387:1 all' incirca. Dunque la massima altezza dell' atmosfera solare sotto l' equatore del Sole è $= \sqrt[3]{42387} = 35$ semidiametri solari, ed essendo il semidiametro del Sole centuplo di quello della Terra, si solleva perciò l' atmosfera solare nell' equatore all' enorme altezza di tre mila cinquecento semidiametri terrestri sopra il centro del Sole, vale a dire cinquecento trent' otto volte più che non si alza l' atmosfera terrestre verso l' equatore sopra il centro della Terra, e sopra la superficie del Sole quella si alza seicento trenta sei volte più che non s' in-

nalza questa sopra la superficie della Terra.

39. Si determina poi il rapporto del semidiametro CM dell' equatore della massa fluida al suo semiasse CF con fare $y = 0$ nell' equazione generale, la quale si riduce alla seguente $x^6 - \frac{4g}{fb} \cdot x^4 + \frac{4g^2}{b^2f^2} \cdot x^2 - \frac{4g^2}{f^2} = 0$, ovvero $x^2\left(\frac{2g}{fb} - x^2\right)^2 - \frac{4g^2}{f^2} = 0$, ed in questa sostituendo $\frac{g^{\frac{2}{3}}}{f^{\frac{2}{3}}}$ per x^2 si ottiene $\frac{g^{\frac{2}{3}}}{f^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{2g}{fb} - \frac{g^{\frac{2}{3}}}{f^{\frac{2}{3}}}\right)^2 - \frac{4g^2}{f^2} = 0$; e dividendo per $\frac{g^{\frac{2}{3}}}{f^{\frac{2}{3}}}$ nasce $\left(\frac{2g}{fb} - \frac{g^{\frac{2}{3}}}{f^{\frac{2}{3}}}\right)^2 - \frac{4g^{\frac{4}{3}}}{f^{\frac{4}{3}}} = 0$, e trasponendo, poi cavando la radice quadrata si trova $\frac{2g}{fb} - \frac{g^{\frac{2}{3}}}{f^{\frac{2}{3}}} = \frac{2g^{\frac{2}{3}}}{f^{\frac{2}{3}}}$, cioè $\frac{2g}{fb} = \frac{3g^{\frac{2}{3}}}{f^{\frac{2}{3}}}$, e per fine $b = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{g}{f}}$.
Dal che si fa manifesto, che il diametro dell' equatore del fluido rotante è sesquialtero del suo asse.

40. Per vie meglio conoscere la nostra Curva del sesto ordine generatrice della superficie del fluido proposto, prendiamo dalla sua equazione generale il valore di y, ed otterremo

$$y^2 = \frac{\frac{4g}{fb}.x^4 - \frac{4g^2}{b^2f^2}.x^2 + \frac{4g^2}{f^2} - x^6}{x^4 - \frac{4g}{fb}.x^2 + \frac{4g^2}{b^2f^2}}$$

$$= \frac{\frac{4g^2}{f^2} - x^2\left(x^2 - \frac{2g}{fb}\right)^2}{\left(x^2 - \frac{2g}{fb}\right)^2}; \text{ e quindi}$$

$$y = \frac{\sqrt{\left(\frac{4g^2}{f^2} - x^2\left(x^2 - \frac{2g}{fb}\right)^2\right)}}{x^2 - \frac{2g}{fb}};$$

nella quale prendendo $x = 0$ nasce $y = \pm b$, vale a dire si ha il semiasse della massa fluida; il quale è stato ritrovato $= \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{g}{f}}$. Che se si prende $x^2 = \frac{2g}{fb} = 3\sqrt[3]{\frac{g^2}{f^2}}$, risulta $y = \pm \frac{2g:f}{0} = \pm \infty$. Da ciò apparisce, che per ciascuno de' due valori $\pm \sqrt{3\sqrt[3]{\frac{g^2}{f^2}}}$ di x la curva generatrice ha due asintoti, uno al di sopra, l' altro al di sotto dell' asse delle x.

PRO-

PROBLEMA X.

41. *Se l' acqua contenuta in un recipiente qualunque si solleva per qualsiasi accidente contro la sponda verticale del medesimo, sicchè per tale elevazione resti esposta all' azione del vento, che vi soffia contro orizzontalmente; si dimanda qual sarà la figura di equilibrio, alla quale verrà ridotta dall' impulso del vento la superficie dell' acqua intumescente.*

SOLUZIONE.

Rappresenti VM (*Fig.* 10.) la direzione orizzontale del vento, che va ad investire e percuotere in M l' acqua sollevata sopra il livello contro la sponda verticale AB dello stagno; e sia AMC la sezione fatta nella superficie dell' acqua con un piano verticale, che passando per la direzione del vento taglia il corpo d' acqua tumefatto. Riferendo pertanto all' asse verticale AB la curva AMC, si prenda l' ascissa $AN = x$, l' ordinata perpendicolare $NM = y$, e l' arco $AM = s$, e sia A il punto della massima elevazione dell' acqua. E giacchè si suppone il fluido ridotto allo stato di equilibrio, sarà per l' Idrostatica la pressione contro l' elemento Mm della Curva uguale al peso d' un volume d' acqua contenuto sotto il prodotto di Mm nell' altezza AN, cioè chiamata n la gravità specifica dell' acqua sarà la det-

Fig. 10.

ta pressione $= nxds$, e questa sempre si esercita nella direzione MP perpendicolare alla Curva nel punto M.

Si faccia ora la velocità del vento $= c$; sicchè c indichi lo spazio percorso equabilmente dal vento in un secondo di tempo, e si chiami a l'altezza della caduta de' gravi in un secondo, la quale è di 15, 1 piedi Parigini. Sarà dunque $\frac{cc}{4a}$ l'altezza *dovuta* alla velocità c del vento, il quale se andasse ad urtare perpendicolarmente contro l'elemento Mm della Curva, vi farebbe uno sforzo pari al peso d'un volume d'aria compreso dal prodotto dell'elemento moltiplicato per $\frac{cc}{4a}$, cioè chiamata 1 la gravità specifica dell'aria l'impulso del vento sarebbe $= \frac{ccds}{4a}$. Ma perchè il vento urta nell'elemento Mm sotto l'angolo VMm, il cui seno è $= \frac{dx}{ds}$; se si adotta il noto principio, che gl'impulsi obbliqui de' fluidi seguitino in parità del restante la ragione duplicata de' seni degli angoli d'incidenza, ne risulta l'impulso contro $Mm = \frac{ccds}{4a} \cdot \frac{dx^2}{ds^2} = \frac{ccdx^2}{4ads}$.

E siccome quest' impulso agisce contro Mm

Mm nella direzione *MQ* normale alla Curva in *M*, e tende dal di fuori al di dentro della Curva cioè da *M* a *Q*; e per lo contrario la pressione dianzi trovato contro il detto elemento *Mm* si dirige perpendicolarmente dal di dentro al di fuori della Curva, cioè da *M* a *P*; quindi è, che ugualiate per la condizione dell' equilibrio queste due forze opposte ci si offre l' equazione $\frac{ccdx^2}{4ads} = nxds$, ovvero $ds^2 = \frac{ccdx^2}{4nax}$, ed estraendo la radice quadrata $ds = \frac{cdx}{2\sqrt{nax}}$, ed integrando $s = \frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{na}}$. Da questa equazione apparisce, che l' arco *AM* della Curva è proporzionale alla radice dell' ascissa corrispondente *AN*; e però la Curva cercata è la Cicloide.

Che se vuolsi introdurre nel calcolo l' ordinata $NM = y$, basta sostituire nell' equazione $ds^2 = \frac{ccdx^2}{4nax}$ in luogo di ds^2 il suo valore $dx^2 + dy^2$, il che dà $dy = dx\sqrt{\left(\frac{cc}{4nax} - 1\right)}$; e prendendo $\frac{cc}{4na} = 2r$, nasce $dy = dx\sqrt{\left(\frac{2r}{x} - 1\right)} = \frac{dx\sqrt{(2r - x)}}{\sqrt{x}}$, e se questa frazione si molti-

 plica

plica sotto e sopra pel numeratore $\sqrt{(2r-x)}$; risulta $dy = \frac{(2r-x)dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \frac{(r-x)dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} + \frac{rdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$, il cui integrale è manifestamente $y = \sqrt{(2rx - x^2)} + r \times \text{Arc. sen.} \frac{\sqrt{(2rx-x^2)}}{r}$, che è la notissima equazione della Cicloide.

42. Secondo le più recenti grandiose sperienze fatte in Parigi sopra la resistenza o l'impulso de' fluidi la legge del quadrato del seno d'incidenza per gli urti obbliqui poco si accorda colla verità, e tanto meno vi si accorda quanto è minore l'angolo dell'incidenza, ed allorchè quest'angolo è picciolissimo, la ragione duplicata del seno d'un tal angolo si cangia presso a poco nella ragion semplice del seno istesso. Se pertanto nell'ipotesi, che la percossa obbliqua del fluido stia non come il quadrato del seno, ma come il semplice seno dell'incidenza, si vorrà indagare la curva di equilibrio del presente Problema, basterà moltiplicare $\frac{ccds}{4a}$ per $\frac{dx}{ds}$, e si avrà l'azione del vento $= \frac{ccdx}{4a}$, la quale per la natura dell'equilibrio dovendo essere eguale alla pressione $nxds$

ci

ci offre l'equazione $\frac{ccdx}{4a} = nxds$, ovvero $\frac{cc}{4na} = \frac{xds}{dx}$. Per conoscere la curva di questa equazione, menisi per la sommità A del fluido la retta orizzontale AF, e da M la tangente MG della curva, e dal concorso G colla orizzontale si conduca all' ordinata MN la perpendicolare GE: indi si applichi infinitamente vicina alla MN l' altra ordinata mn, su cui caschi il perpendicolo Mr. La similitudine de' triangoli Mrm, MEG ci offre l' analogia $Mr : Mm :: GE : MG$, ovvero $dx : ds :: x : \frac{xds}{dx}$. Dunque la tangente MG della curva è $= \frac{xds}{dx} = \frac{cc}{4na}$, cioè uguale ad una quantità costante, e conseguentemente la curva altro non è che la Trattoria.

In grazia di tal curva, scriviamo $\surd(dx^2 + dy^2)$ in vece di ds, e la sua equazione diverrà $\frac{x}{dx}\surd(dx^2 + dy^2) = \frac{cc}{4na} = b$ facendo $b = \frac{cc}{4na}$. Da questa equazione si deduce $dy = \frac{dx}{x}\surd(b^2 - x^2)$. Fatto poi $\surd(b^2 - x^2) = z$, e quindi $x^2 = b^2 - z^2$, e $\frac{dx}{x} = -\frac{zdz}{b^2 - z^2}$, diventa

$\frac{dx}{x}\sqrt{(b^2 - x^2)} = dy = - \frac{z^2 dz}{b^2 - z^2} = dz$
$- \frac{b^2 dz}{(b - z)(b + z)} = dz - \frac{\frac{1}{2} b dz}{b - z} -$
$\frac{\frac{1}{2} b dz}{b + z}$. Laonde integrando trovasi $y = z -$
$\frac{1}{2} b \log. \frac{b + z}{b - z} +$ Cost. $= \sqrt{(b^2 - x^2)} -$
$\frac{1}{2} b \log. \frac{b + \sqrt{(b^2 - x^2)}}{b - \sqrt{(b^2 - x^2)}} +$ Cost. $=$
$\sqrt{(b^2 - x^2)} - b \log. \frac{b + \sqrt{(b^2 - x^2)}}{x} +$
Cost.; e dovendo annullarsi insieme le coordinate x, y, nasce Cost. $= b \log. \frac{2b}{0} - b =$
$b \log. \infty - b$; e conseguentemente $y =$
$b \log. \infty - b + \sqrt{(b^2 - x^2)} -$
$b \log. \frac{b + \sqrt{(b^2 - x^2)}}{x}$, il qual valore infinito di y dà a divedere, che il punto A si scosta in infinito. Così pure dall' equazione $\frac{ds}{dx} = \frac{b}{x}$ si raccoglie, che nel punto C, dove l' ascissa è uguale alla tangente costante della Trattoria, la tangente stessa CF diventa parallela all' ascissa, ovvero verticale.

43. Che se per accostarci per avventura più vicino al vero nella soluzione di questo Pro-

Problema, combineremo insieme l'una e l'altra ipotesi, quella cioè dell'urto obbliquo proporzionale al quadrato del seno d'incidenza coll'altra del detto urto proporzionale al semplice seno, allora preso λ per esprimere un'assai picciola frazione, e nominando ϕ l'angolo d'incidenza converrà supporre l'impulso del vento proporzionale all'espressione $(1 - \lambda) \times$ sen. $\phi^2 + \lambda$ sen. ϕ, la quale offre visibilmente l'impulso presso a poco $= 1$, cioè diretto quando l'angolo ϕ poco si scosta da 90°., ed esibisce all'opposto l'impulso proporzionale al semplice seno, quando φ è picciolissimo. Essendo pertanto sen. $\varphi = \frac{dx}{ds}$, nasce l'impulso del vento $= \frac{cc ds}{4a}\left(\frac{dx^2}{ds^2}(1-\lambda) + \frac{\lambda dx}{ds}\right)$ $= nxds$. Da questa equazione, facendo $\frac{cc}{4na}$ $= 2h$, si ha $2h\left(\frac{dx^2}{ds}(1 - \lambda) + \lambda dx\right)$ $= xds$, ossia $2h\left(dx^2(1 - \lambda) + \lambda dxds\right)$ $= xds^2$. Si piglj una nuova variabile v, e si assuma $ds = vdx$, e fatta questa sostituzione di ds nella precedente equazione e dividendo per dx^2, avremo $2h(1 - \lambda + \lambda v) = xvv$, cioè $x = \frac{2h(1 - \lambda + \lambda v)}{vv}$.

Parimente essendo $s = \int v dx = vx - \int x dv$, ed inoltre $\int x dv = \int \frac{2h dv (1 - \lambda + \lambda v)}{vv} = - \frac{2h(1-\lambda)}{v} + 2h\lambda \log. v$, sarà $s = \frac{4h(1-\lambda)}{v} + 2h\lambda - 2h\lambda \log. v$. Dal che apparisce, che tanto l'ascissa x, quanto l'arco s della Curva ricercata viene espressa da una funzione d'una nuova variabile v, la qual funzione è algebraica per l'ascissa, e trascendente per l'arco.

Volendosi poi l'equazione fralle coordinate x, y, bisogna supporre $dy = pdx$, essendo p una variabile, e si avrà $ds = \sqrt{(dx^2 + p^2 dx^2)} = dx \sqrt{(1 + pp)}$; e se si sostituisce questo valore nell' equazione

$2h \left(dx^2 (1 - \lambda) + \lambda dx ds \right) = x ds^2$;

e si divide per dx^2, nasce

$2h \left(1 - \lambda + \lambda \sqrt{(1 + p^2)} \right) = x (1 + p^2)$, e quindi $x = \frac{2h(1-\lambda)}{1+pp} + \frac{2h\lambda}{\sqrt{(1+pp)}}$.

Così per essere $y = \int p dx = px - \int x dp = \frac{2hp(1-\lambda)}{1+pp} + \frac{2h\lambda p}{\sqrt{(1+pp)}} -$

2h

$2h(1-\lambda)\int\frac{dp}{1+pp} - 2h\lambda\int\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}$;
ed inoltre $\int\frac{dp}{1+p^2}$ = Arc. tang. p, e
$\int\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}} = \log.\left(p+\sqrt{(1+pp)}\right)$,
ne verrà per fine $y = \frac{2hp(1-\lambda)}{1+p^2} +$
$\frac{2h\lambda p}{\sqrt{(1+pp)}} - 2h(1-\lambda)$. Arc. tang. p —
$2h\lambda \log.\left(p+\sqrt{(1+pp)}\right)$. Da ciò è manifesto, che le coordinate x, y sono funzioni della stessa variabile p, e però è nota la loro relazione.

SCO-

SCOLIO GENERALE.

Sopra la Resistenza de' Fluidi.

§. 44. La precisa misura dell' impulso d' un fluido contro un piano, ovvero della resistenza, che incontra un corpo solido nel dividere ed attraversare un fluido, alla qual misura si è dovuto ricorrere nella soluzione dell' ultimo Problema e di altri precedenti, è una ricerca tanto importante e indispensabile nell' Idrodinamica, nell' Architettura Navale, nella costruzione delle macchine idrauliche, e nel tempo stesso tanto intricata e difficile, che i Geometri e gli Sperimentatori se non hanno lasciato alcun mezzo intentato per venirne a capo, l'esito però non ha pienamente corrisposto ai loro tentativi, e il frutto delle loro fatiche è stato in fine di dover in parte rinunziare alle teorie, prima senza esame adottate. Ciò che si è intrapreso dai primarj Geometri in questi ultimi anni intorno a tal materia supera di gran lunga per l' esattezza, per la varietà, per l' arte, per la finezza e moltiplicità de' ripieghi tutti gli anteriori tentativi.

E primieramente il celebre Geometra Sig. Cav. de BORDA in due eccellenti Dissertazioni inserite nelle Memorie dell' Accademia delle

Scien-

Scienze di Parigi per gli anni 1763, e 1767 richiama ad esame queſto gran Problema, e nella prima egli incomincia a determinare la reſiſtenza, che incontrano nell' aria le superficie, da cui l' aria è colpita. Egli adopra a tal effetto una specie di ventola, che porta nelle sue eſtremità la superficie, di cui vuolſi conoscere la reſiſtenza. I risultati delle sperienze per le superficie piane, e percoſſe direttamente dall' aria sono 1.° che facendo variare la velocità della ventola le reſiſtenze seguitano molto esattamente la ragione duplicata delle velocità; nel che l' eſperienza va d' accordo colla teoria: 2.° che facendo variare la superficie, le reſiſtenze non seguitano la ragione delle superficie, ma che una superficie grande soffre più di reſiſtenza a proporzione che una piccola. Quanto alla reſiſtenza delle superficie inclinate, e curve, come de' prismi, de' cilindri, e delle sfere egli ritrova, che i risultati dell'esperienza non solamente non ſi accordano con quelli della teoria, ma che bene speſſo i primi procedono con tenore contrario ai secondi relativamente alla legge teorica delle reſiſtenze proporzionali ai quadrati dei seni d' incidenza. Nella seconda Diſſertazione egli esamina la reſiſtenza dell' acqua, valendoſi della medeſima ventola colla sola differenza, che dove prima queſta girava verticalmente, ora ſi fa girare orizzontalmente, e determina principalmente la reſiſtenza de' corpi sferici, che

ſi

si muovono dentro l'acqua. I risultati di queste nuove sperienze si riducono ai seguenti: 1°. una sfera immersa nell'acqua, e mossa con differenti velocità soffre resistenze proporzionali ai quadrati delle velocità: 2°. la resistenza della superficie convessa dell'emisfero è presso a poco la stessa che quella della sfera intera, e conseguentemente la sola parte anteriore del corpo è quella che incontra la resistenza, almeno allorchè le velocità sono picciole: 3°. la resistenza della sfera è $\frac{2}{5}$ in circa della resistenza del suo circolo massimo laddove secondo la teoria quella dovrebb' essere la metà di questa: 4°. la sfera soggiace a minor resistenza movendosi tutta sott' acqua, che movendosi a galla o alla superficie dell' acqua: 5°. se una sfera galleggiante si muove alla superficie dell'acqua con diverse velocità, la sua resistenza cresce in maggior ragione di quella de' quadrati delle velocità.

Dopo gl'indicati due scritti comparve nelle Memorie dell' Accademia di Marina di Brest un pregevolissimo Opuscolo del fu Sig. de MARGUERIE sullo stesso argomento. Egli confronta colla comune teoria alcune scelte esperienze fatte a Porto Oriente in Bretagna dal Sig. THEVENARD, e da questo confronto ritrova, che la legge del quadrato delle velocità per gli urti diretti poco si scosta da ciò che offrono le dette sperienze; che la legge del quadrato de' seni d'incidenza per gli urti obbli-

quì

qui è lontanissima dal vero, al quale molto più si avvicina la legge del semplice seno; che inoltre quando la parte anteriore del corpo è formata da due piani inclinati la resistenza dell' acqua, passato un certo angolo, seguita con sufficiente esattezza la semplice ragione de' seni degli angoli d' incidenza; e che finalmente in parità di tutte le altre cose la resistenza non cresce in quella proporzione, in cui cresce la superficie percossa. Questo ingegnoso Geometra fa poi avvedutamente osservare, che se si vuol giugnere a qualche cosa di certo e preciso in materia sì oscura, egli è indispensabile di fare le sperienze più in grande che sia possibile, perchè nascendo nelle sperienze l' effetto totale dall' azione di molte cause diverse, si rende necessario il riconoscere la parte, che ha ciascuna di queste cause alla produzione di quell' effetto, ed una tal cognizione si ha molto più facilmente e sicuramente dalle sperienze eseguite in grande, che da altre fatte in piccolo, nelle quali non potendo essere se non picciolissima la parte dell' effetto totale prodotta da ciascuna delle cagioni, che vi concorrono, si corre rischio o di non ravvisarla, o di non formarne un' idea abbastanza distinta, o di attribuire ad una di dette cause ciò che è proprio d' un' altra.

Quasi contemporaneamente alla citata Memoria del Sig. de MARGUERIE, il rinomato

Geo-

Geometra Sig. Don Giorgio JUAN Commendatore de Aliaga, e Capo-Squadra di S. M. Catt. pubblicò in Madrid l'anno 1771 in due tomi in 4°. la bella e profonda Opera in idioma spagnuolo intitolata *Esame Marittimo Teorico Pratico, ovvero Trattato di Meccanica applicato alla costruzione, cognizione, e maneggio delle Navi, ed altre Imbarcazioni*. In quest' opera l'illustre Spagnuolo riguardando come un punto fondamentale della Nautica il gran Problema della resistenza de' fluidi, forma di esso un particolar oggetto delle sue investigazioni, e dopo averlo minutamente scandagliato coll' esperienza e col raziocinio, ne trae per base d'una più sicura teoria della resistenza de' fluidi alcuni canoni, i quali quanto sono singolari e inaspettati, tanto sono discordi da ciò, che altri grand' uomini hanno osservato e stabilito. Egli espone alla forza dell' acqua corrente una tavola, e ritrova una tal forza non solo quattro, ma ben anche otto volte maggiore di quella, che le assegna nel suo *Trattato del Moto delle Acque Disc.* 3. *Part.* 2. *il* MARIOTTE; e ciò, perchè la forza, dice il Geometra Spagnuolo, non dipende soltanto dalla superficie colpita, come finora si era creduto, ma ancora dalla sua maggior profondità dentro il fluido: per modo che posta la medesima tavola tagliata in parallelogrammo rettangolo, col suo lato maggiore orizzontale, ella soffre molto meno di resisten-

za

za, che posto lo stesso lato verticale: e se la tavola è quattro volte più lunga che larga, la resistenza col suo lato maggior verticale è presso a poco due volte maggiore che collo stesso lato orizzontale; e quindi le resistenze stanno a un dipresso come le radici quadrate delle altezze o profondità della tavola nel fluido. Conseguentemente se una nave avrà le sue dimensioni lineari doppie di un'altra che le sia *simile*, e però la sua superficie esposta all' urto dell'acqua sarà quadrupla della superficie esposta dell' altra, la resistenza di quella non starà già alla resistenza di questa come 4: 1, ma sibbene come 5 $\frac{3}{7}$: 1; differenza certamente eccessiva, e che dee sembrare a chicchessia straordinaria. Oltre a ciò gli sperimenti replicati di quest'Autore gli fecero chiaramente conoscere, che le resistenze non seguitavano la legge dei quadrati delle velocità, nè tampoco quella dei quadrati de' seni d' incidenza, ma che piuttosto si avvicinavano con sufficiente esattezza alla legge delle semplici velocità, e de' semplici seni d' incidenza. Colla scorta, e col perpetuo confronto de' fatti più singolari, de' più ingegnosi raziocinj, e delle più fine congetture viene egli indi a proporre la sua nuova teoria della resistenza, e pianta per canone, che le resistenze de' fluidi sono come le densità de' medesimi, come le superficie percosse, come le radici quadrate delle profondità di tali superfi-

cie

cie dentro i fluidi, come le semplici velocità, e come i semplici seni degli angoli d' incidenza. » Ma questo non è ancor tutto (avverte il mentovato Autore), poichè ciò riguarda il solo caso che la superficie stia interamente immersa nel fluido, e che la parte anteriore del corpo sia simile alla posteriore: quando una parte della superficie si trova fuori del fluido, allora risulta nella resistenza una nuova quantità, la quale non ha alcuna dipendenza dalla superficie urtata, e solo deriva dalla velocità, senza però essere proporzionale alle semplici velocità, nè ai loro quadrati, ma sibbene ai quadrato-quadrati di quelle. In alcune circostanze risulta altresì una terza quantità, che è come i quadrati delle velocità, e come le superficie urtate; il che corrisponde precisamente al caso fino ad ora contemplato: ed in altre occasioni ne nasce anche una quarta, la quale non ha relazione alcuna alle velocità, ma soltanto alle superficie urtate. In generale le resistenze secondo questa teoria dipendono da quattro distinte quantità, delle quali secondo le occasioni svaniscono alcune; e fortunatamente per l' assunto della Marina, che ci proponghiamo, si riducono d' ordinario ad una sola, che è la prima delle riferite; sebbene nelle occasioni di velocità molto grande non possiamo dispensarci dal far attenzione alla seconda: per ciò che riguarda la terza, l' unica di cui siasi

fatto

fatto caso fino al presente, essa è ordinariamente inutile. Già si aveva (prosiegue lo stesso Autore) con questo confronto un fondamento dell'edifizio; ma molte sperienze in piccolo non danno uguali risultati nel [illegible]de e nell' esteso, poichè in questo caso si rendono più sensibili gli effetti degli accidenti, e ciò appunto accadeva nelle azioni della Nave paragonate colle sperienze finora eseguite. Non soggiacque però a tali inconvenienti la nostra teoria; perciocchè quando potevamo aspetta[illegible] maggiori differenze per l'aumento ritrovato delle resistenze, si incontrò il più perfetto risultato che sperar si potesse. Con questa teoria si ritrovò, che le Imbarcazioni debbono andare precisamente nel modo che vanno, sia *a poppa*, come *a vento largo*, o *di bolina*; e quello che è più, si trovò, che non solo camminano alcune a *vento largo* quasi tanto quanto il medesimo vento, ma che taluna di esse corre più dello stesso vento: paradosso, che a molti sembrerà affatto stravagante, ma che non pertanto si vedrà dimostrato, non già ne' termini, in cui lo credette Giovanni BERNOULLI (a), cioè di potersi spiegare quasi infinite vele, supposto assolutamente impossibile nella pratica, ma in termini di fatto, e di ciò che attualmente accade in molte Imbarcazioni, come Galere,

(a) Gio. BERNOULLI *Opere tom.* 2. N. XCIII.

Sciabecchi, ec. » Sin qui il dotto Spagnuolo; il quale trovata questa esatta conformità della sua nuova teoria colla pratica tanto nelle piccole superficie, come nelle amplissime delle Navi, passa a farne l' applicazione a due casi insigni e memorabili. Il primo riguarda i Cervi Volanti, o le Comete, che fanno volare i fanciulli, e prendendo per norma i calcoli del Sig. Alberto EULERO nella sua bella Differtazione *sopra i Cervi Volanti* inserita nelle *Memorie dell' Accademia di Berlino per l' anno 1756.* egli paragona nel computo della forza del vento contro di quelli l' antica colla sua nuova teoria, e ritrova a riprovazione della prima e in conferma della seconda, che i fenomeni tutti del Cervo Volante cospirano a manifestare l' impulso del vento proporzionale alla semplice velocità, ed al semplice seno dell' angolo d' incidenza. L' altro solenne caso, a cui egli applica la sua teoria, concerne le belle sperienze del Sig. SMEATON. Questo Fisico Inglese in una Memoria intitolata *Esame sperimentale intorno le forze naturali dell' acqua, e del vento nel muovere in giro mulini, ed altre macchine soggette ad un moto circolare,* inserita nel tomo 51. part. 1. delle *Transazioni Filosofiche*, propone una piccola macchina di sua invenzione, con cui per mezzo di replicate sperienze verifica la forza esercitata dall' acqua, la quale uscendo da un recipiente per un' apertura va ad urtare le pa-

palette d'una ruota verticale disposta a foggia di quella di un mulino, mentre intanto un peso sostenuto da una corda, che si avvolge all' asse della ruota, serve a far conoscere l'effetto della macchina. Di così fatte sperienze fino a ventisette dall'Autore Spagnuolo sono paragonate tanto colla comune teoria, che colla sua propria; e trova egli infine, che tutte convengono esattamente con questa, e si allontanano interamente da quella.

Sei anni dopo la pubblicazione dell'indicata Opera Spagnuola uscì alla luce in Parigi il Libro prezioso e interessantissimo intitolato *Nuove Sperienze sopra la Resistenza de' Fluidi, de' Sig.* D' ALEMBERT, *Marchese De* CONDORCET, *e Abbate* BOSSUT, *Relatore il Sig. Abbate* BOSSUT. Le numerosissime sperienze registrate colla più scrupolosa esattezza in quest' opera sono le più variate, le meno equivoche, e le meglio eseguite, e l' opera stessa sarà sempre un raro deposito di quanto ha di più importante e memorabile la Fisica Sperimentale. Le conseguenze, che da siffatti esperimenti sonosi ricavate si riducono a queste 1°. che la tenacità dell'acqua è una forza, che dee riguardarsi come infinitamente piccola in confronto della resistenza proveniente dall'inerzia: che lo stesso dee dirsi del soffregamento dell'acqua lungo le pareti del corpo nuotante, il qual soffregamento non può rendersi sensibile se non nel caso straordi-

nario che il battello abbia una lunghezza eccessiva per rapporto alla sua larghezza: 2°. che la resistenza perpendicolare e diretta d'un piano in un fluido indefinito è sensibilmente uguale al peso d' un prisma dello stesso fluido avente per base la superficie percossa, e per altezza quella, da cui dee cascare un grave per acquistare una velocità uguale alla velocità dell' impulso: 3°. che le resistenze incontrate da un medesimo corpo di qualsiasi figura mosso in un fluido indefinito con differenti velocità sono sensibilmente in ragione duplicata delle velocità: adoprasi la restrizione *sensibilmente*, perchè in realtà e a tutto rigore le resistenze crescono in una ragione un poco maggiore della duplicata delle velocità: 4°. che le resistenze perpendicolari e dirette delle superficie piane mosse nel fluido colla stessa velocità seguitano sensibilmente la ragione delle stesse superficie, avuto il dovuto riguardo alle differenti intumescenze dell' acqua, la quale sollevasi intorno a quelle nel loro moto: 5°. che le resistenze provenienti dai moti obbliqui si allontanano eccessivamente, quando gli angoli d' incidenza sono piccoli, dalla ragione duplicata de' seni di tali angoli; e che quando questi sono grandi, come fra i 50 e 90 gradi, le resistenze meno si allontanano dalla detta proporzione, alla quale tanto più si vanno accostando, quanto più gli angoli d' incidenza si avvicinano al retto.

Con-

Convinto il Sig. Abbate BOSSUT dalle proprie sperienze doversi onninamente rinunziare alla legge de' quadrati de' seni d' incidenza nell' urto obbliquo de' fluidi, rivolse il pensiero all'altro gran tentativo di ricercare la vera legge da sostituirsi alla già abrogata. A tale oggetto egli intraprese una nuova serie di esperienze da esso minutamente esposte e discusse in un' eccellente Memoria *sulla resistenza de' Fluidi*, inserita negli Atti dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1778. Si valse in questi sperimenti di battelli, le cui prore erano formate da due piani congiunti fra loro sotto diversi angoli dai 12 fino ai 180 gradi. E siccome nell' indagare le leggi dei fenomeni e ricavarle dalle sperienze, riesce di molto vantaggio per agevolare il calcolo il prendere in progressione aritmetica quelle quantità, che debbono riguardarsi come note, si pigliarono perciò i detti angoli colla differenza costante di 12 gradi dall' uno all' altro. Fatti pertanto gli opportuni paragoni si ritrovò, che le resistenze dedotte da tali esperimenti eccessivamente differivano da quelle, che dà l' ordinaria legge de' quadrati de' seni d' incidenza, riuscendo sempre di gran lunga più forte la resistenza sperimentale della ipotetica, e ciò in una proporzione tanto maggiore, quanto minore è l' angolo d' incidenza, talmente che per l' angolo di 12 gradi la resistenza effettiva e sperimentale era

tren-

trenta volte più forte di quella, che deriva dalla teoria volgare. Dopo aver posto a rigoroso esame la differenza sempre grande e notabile fra la resistenza effettiva e la teoretica si attenne l'illustre Geometra all'idea naturalmente in esso destatasi di supporre una tal differenza eguale ad una potenza del complemento dell'angolo d'incidenza, moltiplicata per un coefficiente costante. Quest'ingegnosa idea ebbe un esito felice, e da essa trasse l'Autore l'espressione della resistenza obbliqua rappresentata da due termini, uno de' quali contiene il quadrato del seno dell'angolo d'incidenza, e l'altro la potenza del complemento d'un tal angolo, la quale ha per esponente $3\frac{1}{4}$; e per tal modo esprimendosi col numero arbitrario 10000 la resistenza diretta o perpendicolare, e nominandosi x il complemento dell'angolo d'incidenza, q l'angolo di 6 gradi, la formola della resistenza obbliqua sotto l'angolo $90^{\circ} - x$ è la quantità binomia $10000 \times \cos. x^2$

$+ 3,153 \times \left(\frac{x}{q} \right)^{3\frac{1}{4}}$, e questa soddisfa con sufficiente esattezza alle sperienze per tutti gli angoli d'incidenza, che superano i 12 gradi, ma incomincia a scostarsi molto sensibilmente dall'esperienza quando l'angolo si approssima ai 12 gradi; il che fa conoscere, che per far quadrare la legge o formola ritrovata anche ai

pic-

piccoli angoli da quest' ultimo fino a zero, sarebbe mestieri aggiugnervi un termine di più e ridurla ad un' espressione trinomia, nella quale svanissero il secondo e terzo termine per gli angoli d' incidenza molto prossimi al retto, e per gli angoli minori di questi fino all' angolo di 12 gradi svanisse il solo terzo termine, e sussistessero tutti e tre i termini per gli angoli dai 12 gradi in giù.

Stabilita in qualche modo da quest' illustre Geometra la legge delle resistenze per le superficie piane mosse ne' fluidi sotto qualunque angolo d' inclinazione, restava a vedere, se essa era applicabile alle superficie curve. Ma avendo egli ritrovato per un gran numero di esperimenti, che le resistenze indirette delle superficie curve, e quelle delle superficie piane contraddicevano per due versi opposti la comune teoria, essendo le prime sempre più deboli, le seconde sempre più forti delle resistenze teoretiche, si avvide ben tosto, che quand' anche si conoscesse colla maggior precisione la legge per un piano mosso sotto qualunque angolo, non potrebbe questa applicarsi ad una superficie curva.

Se dopo i penosi travaglj di questi grand' Uomini resta ancora in questa delicata materia tanto d' incertezza e d' oscurità onde sgomentare il Filosofo più intrepido, mal si apporrebbe il Pirronista, il quale volesse con ciò farsi

giuoco

giuoco della vantata evidenza della Matematica; Questa Scienza non crea, nè inventa i dati, di cui si vale, ma li prende dalle altre Scienze ad imprestito, e non è sua colpa, se queste non le somministrano ciò che ella domanda,

Fine dell' Opera.

pag.	lin.	Errori	Correzioni
28	4	ſtagnati	ſtagnanti
29	17	$\varpi bmnc \times ab$	$\varpi \times bmnc \times ab$
41	10	queſta	queſte
105	6	*IEZY*	*IEZX*
107	ult.	$\sqrt{qh}$ al	a $\sqrt{qh}$ il
108	6	$\frac{Mm}{Vn}$	$\frac{Mm}{Vu}$
111	19	paragonare	paragonare
145	26	alla ſuperficie	alle ſuperficie
158	27	il cono retto al	al cono retto il
165	3	$+\int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$ ſen. φ	$+\int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx$ ſen. φ
168	12	*cyay*	*cyax*
175	5	capitombole	capitombolo
179	16	$MF - Y$	$MF = y$
180	21	ſoltando	ſoltanto
209	15	tre caſi	quattro caſi
216	22	23 24 *IO*	*IL*
219	7	precorſi	percorſi
227	26	le preſſione	la preſſione
234	16	ζ, s, p	$x, \zeta, s, p,$
238	16	$2\lambda^{-\frac{n}{f^2}+1}$	$2\lambda^{-\frac{n^2}{f^2}+1}$
242	14	$\frac{1}{2} c^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} c^{-\frac{1}{2}}$
244	6	cercaſi le	cercaſi la
247	13	$\left(\frac{f^2}{n^2-f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2-f^2}}$	$\left(\frac{f^2}{n^2-f^2}\right)^{\frac{f^2}{n^2-2f^2}}$

248	4	$\frac{\lambda}{d}$	$\frac{\lambda}{b}$
249	8	$\frac{f^2}{2n - 3f^2}$	$\frac{f^2}{2n^2 - 3f^2}$
252	6	$(1 + y)^{\frac{n}{f^2}}$	$(1 + y)^{\frac{n^2}{f^2}}$
257	ult.	$\overline{n^2 - f}$	$\overline{n^2 - f^2}$
266	9	$\overline{(n^2 - 2f^2)\sqrt{fh}}$	$\overline{(n^2 - f^2)}\,\overline{\sqrt{fh}}$
275	7	$\overline{kf^2\sqrt{fh}}$	$\overline{kf^2\sqrt{fh}}$
279	2	$\sqrt{(2c - na\cos.\mu)}$	$\sqrt{(2c - 2a\cos.\mu)}$
ivi	7	$f(c\sqrt{fh} + na$	$f(c\sqrt{fh} + na)$
280	15	$\left(\frac{k}{y}\right)^{-\frac{n}{f^2}}$	$\left(\frac{k}{y}\right)^{-\frac{n^2}{f^2}}$
291	10	$\overline{b^2 - f^2}$	$\overline{h^2 - f^2}$
295	5	$2(c - 2\cos.\mu)$	$2(c - a\cos.\mu)$
ivi	ult.	$\sqrt{2b\sqrt{(k^2 - f^2)}}$	$\sqrt{2b\sqrt{(h^2 - f^2)}}$
297	8	$\}$	$\}^2$
301	9	$\sqrt{2}$ ec.	$\sqrt{2b}$ ec.
304	ult.	$\sqrt{a\sqrt{15\,1}}$	$\sqrt{2\sqrt{15,1}}$
306	1	$(h^2 - f^2)$	$(h^2 - f^2)\lambda$

309	4	$4e^{\frac{\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}$	$4e^{\frac{t\sqrt{2b}\sqrt{(h^2-f^2)}}{fhM}}$
311	1	$\overline{\sqrt{(h^2-f^2}}$	$\overline{\sqrt{(h^2-f^2)}}$
322	22	§. 56.	§. 156.
327	11	$\frac{d(\text{ec.}}{\omega\ \text{ec.}}$	$\frac{-d(\text{ec.}}{\omega\ \text{ee.}}$
334	3	cos μ	cos. η
336	18	$=s$	s
337	17	di A	da A
339	4	$-2h^2\alpha dr$sen.η	$-2h^2\alpha dr$ sen. μ
340	3	$-\left(2a+\frac{hr}{\omega}\right)$	$-\left(2\alpha+\frac{hr}{\omega}\right)$
341	11	discendono	dipendono
342	1	$2AF$	$2AE$
344	15	queſto	queſta
ivi	ult.	η, μ, ω, h, g, e zero	η, μ, ω, h, g
346	6	$\sqrt{(}$ h sen. η + h sen. μ	$\sqrt{(}$ h sen. η + h sen. μ)
347	11	tardo	tarde
382	5	dalla	della
ivi	14	è	e
592	9	dividere	divedere
393	9	$\frac{y}{b^2}$	$\frac{y^2}{b^2}$
416	18	$f=u$	$f=n$
427	5	$-2fh2Mdx$	$-2fh^2Mdx$
430	4	$\frac{4^{At}}{(1+e^{At})^2}$	$=\frac{4e^{At}}{(1+e^{At})^2}$
440	18	sen. $\theta 2$	sen. θ^2

	ivi	— Coſt.	+ Coſt.
42	9	ſeſtanta	ſeſtante
69	ult.	$\sqrt{\frac{AG}{a}}$	$i'\sqrt{\frac{AG}{a}}$
77	15	$\overline{i'(v^2+ab-ae}$	$\overline{i'(v^2+ab-ae)}$
80	2	$-\frac{2t}{t'\times}$	$-\frac{2t}{t'}\times$
18	3	del 1721	nel 1721
52	20	della superficie	dalla superficie
60	5	al	ai
73	6	impreſe	ripreſe
85	11	$P =$ cos. (ec.	$P =$ cos. φ (ec.
87	12	espreſſa	espreſſo
92	6	$\frac{3ux}{2ae}$	$\frac{3ux}{2ac}$
95	9	s' inchina	s' inclina
10	18	y, y'', y''	y, y', y''
11	2	altra	altre
28	18	log. v	log. r
30	14	gx	gk
32	10	(x^2+y)	(x^2+y^2)
34	19	in B	in G

AVVISO AL LEGATORE.

Le sei tavole delle figure ſi diſtribuiranno bene, mettendo

Le prime due alla	*pag.* 146
Le due de' Supplementi alla	*pag.* 496
Quella del Saggio del Sig. Bonati alla	*pag.* 568
E quella dell'Appendice alla	*pag.* 664

n° 18. settembre 1835 - intero contuok. 6